УДК 624.073:531.3

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ТА ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛАСТИН ЗА ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Кожемякіна І. Ф., к. т. н., доц.
Державний вищий навчальний заклад
«Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»

Постановка проблеми. Дослідження дії рухомих навантажень на елементи конструкцій проводяться в більшості випадків у двох напрямах. Перший напрям полягає в визначенні динамічних коефіцієнтів, другий пов'язан з дослідженням критичних швидкостей і зон динамічної нестійкості елементів споруд.. Критичні швидкості є особливими значеннями параметрів диференціальних рівнянь коливань елементів конструкцій. В залежності від постановки задачі критичні швидкості поділяються на два типу: критичні швидкості, які викликають резонанс, і критичні швидкості, перевищення яких коливання стають нестійкими. Критичні швидкості першого типу являються ізольованими, їх можна уникнути, якщо збільшити швидкість руху навантаження. Другий тип швидкостей приводить к нестійкості коливального процесу.

Мета дослідження. Напружено-деформований стан з високим показником змінності, що є характерним для елементів конструкцій значної товщини або при дії зосереджених навантажень, більш точно описується рівняннями теорії пружності. Їх рішення пов'язане зі значними математичними труднощами. Існують різні варіанти уточнених моделей, для яких враховується скривлення елементу, щодо деформації є нормальним до серединної плоскості. Перехід від тривимірних задач теорії пружності до двовимірних здійснюється шляхом апроксимації поліномами по поперечній координаті компонент напряжено–деформованого стану. Розглядається апроксимація переміщень у вигляді складових, які мають певний геометричний зміст.

Представимо переміщення у вигляді

$$u_x(x,y,z,t)=u_{0x}(x,y,t)-u_{1x}(x,y,z,t)+u_{2x}(x,y,z,t)=u_{0x}(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial x}+f(z)\phi(x,y,t),$$

$$u_y(x,y,z,t)=u_{0y}(x,y,t)-u_{1y}(x,y,z,t)+u_{2y}(x,y,z,t)=u_{0y}(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial y}+f(z)\psi(x,y,t),$$

$$w(x,y,z,t)=w(x,y,t),$$

де $f(z)$ – функція, що описує закон скривлення поперечних волокон, така, що $f(0)=0$; $\phi(x,y,t)$, $\psi(x,y,t)$ – кути повороту поперечних волокон у серединної плоскості. Переміщення $u_{1x}(x,y,z,t)$ и $u_{1y}(x,y,z,t)$ пов'язані з поворотом нормалі до серединної плоскості, $u_{2x}(x,y,z,t)$ и $u_{2y}(x,y,z,t)$ визначають закон скривлення поперечних волокон, обумовлений деформацією зсувом.

Для трансверсально ізотропного матеріалу

$$\sigma_x=\frac{E_1}{1-{\nu_1}^2}\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial x}+\nu_1\frac{\partial u_{0y}}{\partial y}-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+f(z)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+\nu_1\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right),$$

$$\sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left(\nu_1\frac{\partial u_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{0y}}{\partial y} - z\left(\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + f(z)\left(\nu_1\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}\left(\frac{\partial u_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial u_{0y}}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\right),$$

$$\tau_{xz} = G_2\gamma_{xz} = G_2\frac{\partial f(z)}{\partial z}\phi, \quad \tau_{yz} = G_2\gamma_{yz} = G_2\frac{\partial f(z)}{\partial z}\psi.$$

Згинальний, крутний моменти, поздовжні та поперечні сили визначаються наступним образом:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z dz = D\left(k_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu_1\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right),$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y z dz = D\left(k_1\left(\nu_1\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \left(\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right),$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy} z dz = D\frac{(1-\nu_1)}{2}\left(k_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right),$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz} dz = k_2 G_2 h\phi, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz} dz = k_2 G_2 h\psi.$$

Коефіцієнти k_1, k_2 визначаються залежностями

$$k_1 = \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2} f(z) z\, dz, \quad k_2 = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial f(z)}{\partial z} dz.$$

Якщо вибрати $f(z) = c(z - 4z^3/3h)$, за $c=1$ отримаємо $k_1 = 4/5$, $k_2 = 2/3$.

В розглянутій моделі деформації, що враховує зсув та інерцію обертання, приймається до уваги скривлення поперечних волокон і пов'язане з ним нелінійне розподілення напружень по висоті пластини. Деформації, напруження і переміщення розділюються на класичні та додаткові, які пов'язані зі зсувом. Поперечні сили, згинальні та крутний моменти мають різні коефіцієнти зсуву, що залежать від закону, який описує скривлення поперечних волокон.

Для отримання рівнянь коливань пластини використовується варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського. Отримані диференційні рівняння в часткових похідних за допомогою процедури Бубнова – Галеркіна зводяться к звичайним диференційним рівнянням.

Розглядається рухоме зосереджене інерційне навантаження. Дослідження стійкості зводиться до знаходження умов, коли характеристичне рівняння не має коренів з додатною речовинною частиною. Дослідження динамічної стійкості елементів конструкцій при дії рухомого навантаження в класичній постановці дозволяє отримати критичні швидкості, що визначають зони нестійких рішень диференціального рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами. Основна область нестійкості виявляється обмеженої знизу, інші стягнуті в лінії.

Розглянуто умови динамічна стійкості пластини при дії рухомого навантаження в уточненій постановці. Дослідження стійкості рішення диференційного рівняння четвертого порядку з періодичними коефіцієнтами також зводиться до знаходження умов, при яких характеристичне рівняння не має коренів з додатною речовинною частиною. Два рішення однакового періоду обмежують область нестійкості, два рішення різних періодів − область стійкості. На границях областей нестійкості знаходяться періодичні рішення з періодом T або $2T$.

Висновки. У наслідку досліджень отримана критична швидкість $v_{кр}^{¿}$, що обмежує основну зону нестійкості. Це тип швидкості, що приводить к нестійкості коливального процесу. При швидкості $v \geq v_{кр}^{¿}$ стійкі коливання пластини при дії рухомого навантаження неможливі. Знайдені швидкості, що знаходяться на границях нижчих областей нестійкості – резонансних кривих. При критичних швидкостях , які лежать на резонансних кривих порушується динамічна стійкість пластини. Ці критичні швидкості являються ізольованими, їх можна уникнути, якщо збільшити швидкість руху навантаження.

Кожна з нижчих областей розпадається на дві області малої ширини. При зневажанні інерцією обертання вони стягуються в лінії. Швидкості, знайдені по уточненій теорії, менше швидкостей, визначених по класичній теорії.

Список використаних джерел

1. Бурка Я. Й., Руданський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. Львів : «Інтелект-Захід», 2007. С. 239.

2. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование матлаб. Киев:. издат. дом «Вильямс», 2001. С. 713.

3. Кожемякина И. Ф. Исследование колебаний и динамической устойчивости пластин при действии подвижных нагрузок : тези доповідей Міжнар. наук.-практ. конф. *Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі.* Київ, 25−26 жовтня, 2017. С. 133.

4. Кожемякина И. Ф. Динамическая устойчивость балок при движении сосредоточенной нагрузки. *Вібрації в техніці та технологіях : XIV Міжнар. наук.-техн. конф.* Дніпропетровськ, 2015. С. 49−50.

5. Kogemyakina I.F**.** Arias of dynamic instability of plate at the action of mobile loads. *Stability of structures : XV Symposium*. Zakopane, 2018. С. 71−72.