

УДК 62-932:62.532

## АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРА ЭКСКАВАТОРА

ГУРКО А. Г., *к.т.н, доцент.*

Кафедра строительных и дорожных машин, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Петровского, 25, 61002, Харьков, Украина, тел. +38 (057) 738-77-92, e-mail: gurko@khadi.kharkov.ua, ORCID ID: 0000-0001-9905-8584.

**Аннотация.** Усовершенствование одноковшовых гидравлических экскаваторов тесно связано с разработкой и внедрением систем автоматического управления его рабочим циклом и созданием роботизированного экскаватора. В связи с этим, при синтезе систем управления экскаватором широко развивается роботизированный подход, согласно которому рабочее оборудование рассматривается как пространственный манипулятор с гидравлическим приводом. Система управления роботизированным экскаватором должна обеспечивать минимум времени выполнения операций, выполнять копанье с максимальной точностью, т.к. это приводит к увеличению производительности, и, при этом, минимизировать энергетические затраты на выполнение рабочего цикла. Для этого необходимо уметь рассчитывать оптимальную с энергетической точки зрения траекторию движения манипулятора экскаватора. Поскольку значения внешних сил, действующих на стрелу, рукоять и ковш экскаватора значительно зависят от их взаимного расположения в пространстве, то для решения указанной задачи необходимо исследование динамических свойств манипулятора экскаватора при его перемещении. Проведение такого исследования и является целью данной работы.

*Ключевые слова:* роботизированный экскаватор; энергетическая эффективность; рабочее оборудование; пространственное положение; математическая модель.

## АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ МАНІПУЛЯТОРА ЕКСКАВАТОРА

ГУРКО А. Г., *к.т.н, доцент.*

Кафедра будівельних і дорожніх машин, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Петровського, 25, 61002, Харків, Україна, тел. +38 (057) 738-77-92, e-mail: gurko@khadi.kharkov.ua, ORCID ID: 0000-0001-9905-8584.

**Анотація.** Удосконалення одноківшових гідравлічних екскаваторів тісно пов'язане з розробкою і впровадженням систем автоматичного управління його робочим циклом і створенням роботизованого екскаватора. У зв'язку з цим, при синтезі систем управління екскаватором широко розвивається роботизований підхід, згідно до якого робоче обладнання розглядається як просторовий маніпулятор з гідравлічним приводом. Система управління роботизованим екскаватором повинна забезпечувати мінімум часу виконання операцій, виконувати копання з максимальною точністю, так як це призводить до збільшення продуктивності, і, при цьому, мінімізувати енергетичні витрати на виконання робочого циклу. Для цього необхідно вміти розраховувати оптимальну з енергетичної точки зору траєкторію руху маніпулятора екскаватора. Оскільки значення зовнішніх сил, що діють на стрілу, рукоять і ківш екскаватора значно залежать від їх взаємного розташування в просторі, то для розв'язання зазначеної задачі необхідне дослідження динамічних властивостей маніпулятора екскаватора при його переміщенні. Проведення такого дослідження і є метою даної роботи.

*Ключові слова:* роботизований екскаватор; енергетична ефективність; робоче обладнання; просторове положення; математична модель.

## ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL OF AN EXCAVATOR MANIPULATOR MOTION

GURKO A. G., *Ph. D., Associate Professor.*

Department building and road machine, Kharkov National Automobile and Highway University, Petrovskogo str., 25, 61002, Kharkov, Ukraine, tel. +38 (057) 738-77-92, e-mail: gurko@khadi.kharkov.ua, ORCID ID: 0000-0001-9905-8584

**Abstract.** Single-bucket excavators improvement is closely associated with development and introduction of their workflow automatic control systems and with a robotic excavator creation. Thereat, at synthesis of an excavator control system, the robotics approach is widely developed, according to which, the work equipment is considered as spatial manipulator with hydraulic actuator. The control system of a robotic excavator has to provide minimum of time of a workflow execution, carry out digging with maximum accuracy, as it leads to the productivity increase, and to minimize expenditure of energy for working cycle implementation at this. For that, it is necessary able to calculate the trajectory of the excavator manipulator optimum in terms of energy. As far as the values of external forces, which affect the excavator boom, stick and bucket, depend significantly on their attitude position, the research of dynamic properties of the excavator manipulator at its movement is necessary. Conducting such research is the purpose of this work.

*Keywords:* robotic excavator; energy efficiency; work equipment; attitude position; mathematical model.

**Актуальность проблемы.** Стремительное развитие технологий в области микропроцессорной техники, средств измерений, систем управления и телекоммуникаций стимулируют исследования по созданию полуавтоматических и автоматических (роботизированных) машин для земляных работ (МЗР). Наиболее распространенной МЗР является универсальный гидравлический экскаватор (ЭГ), который широко используется как на больших строительных площадках (например, при строительстве дорог, дамб и проч.), так и в стеснённых городских условиях (при сооружении траншей, котлованов и т.д.). Внедрение систем управления ЭГ должно обеспечить повышение производительности, качества и энергоэффективности выполнения земляных работ. Для этого система управления должна решать, по крайней мере, три задачи: 1) обеспечить минимум времени выполнения операций, т.к. это непосредственно приводит к увеличению производительности; 2) производить копание с максимальной точностью и 3) рассчитывать такую траекторию перемещения манипулятора ЭГ в пространстве, которая бы минимизировала расход энергии, затрачиваемой на выполнение рабочего цикла, при одновременном соблюдении первых двух требований.

Данная работа направлена на решение третьей из указанных выше задач, т.е. на повышение энергоэффективности рабочего цикла ЭГ за счет использования системы управления процессом копания.

**Анализ публикаций.** Для автоматизации проведения земляных работ разрабатываются и достаточно широко применяются системы, основанные на использовании GPS/ГЛОНАСС-технологий. Как правило, эти системы используют бортовые ЭВМ с человеко-машинным интерфейсом, который в реальном времени отображает информацию о положении машины и конфигурации рабочего оборудования. На основе полученной информации оператор имеет возможность корректировать свои действия с целью повышения качества копания [1].

Некоторые работы, например, [2] направлены на дистанционное управление рабочим процессом экскаватора. Такие системы находят применение при захоронении отходов, при ликвидации последствий техногенных и природных катастроф, в частности, извержений вулканов.

Значительное количество исследований в области автоматизации экскаваторов сосредоточено непосредственно на выполнении операции копания [3-6] и решении сопутствующих задач, например, моделировании свойств грунта и сил взаимодействия ковша с грунтом [4, 7, 8]. Кроме того, большое число работ посвящено автоматизации транспортных этапов технологического процесса копания.

Приведенные выше и многие другие исследования внесли существенный вклад в решение проблемы автоматизации экскаваторных работ. Однако лишь некоторые из них, в частности [9, 10], рассматривали задачу повышения энергетической эффективности экскаваторов за счёт внедрения системы автоматического управления процессом копания. В то же время, энергетические затраты при производстве земляных работ являются одним из основных критериев эффективности МЗР. Таким образом, исследования, направленные на минимизацию энергетических затрат при выполнении технологического процесса копания ЭГ являются актуальными.

Укрупненно структурная модель рабочего цикла универсального одноковшового полноповоротного ЭГ определяется суммой рабочих операций копания, транспортирования грунта к месту выгрузки и позиционирования ковша для выполнения следующей операции копания. Каждую из этих операций можно реализовать различными способами. В частности, копание грунта можно выполнять рукоятью, ковшом, последовательно рукоятью, а затем ковшом или совместно рукоятью и ковшом. Способы же выполнения транспортных операций имеют еще больше вариантов, и их количество увеличивается с ростом числа степеней свободы манипулятора ЭГ.

Известно, что значения внешних сил, действующих на стрелу, рукоять и ковш ЭГ значительно зависят от их взаиморасположения в пространстве. Очевидно, что система управления должна рассчитать такую траекторию движения манипулятора ЭГ и такой способ её реализации (в том числе с использованием совмещенных движений), чтобы минимизировать затраты энергии при выполнении рабочего цикла.

**Цель работы.** Исследование динамических свойств манипулятора ЭГ при его перемещении в пространстве.

**Изложение материала.** Универсальный одноковшовый ЭГ можно рассматривать как промышленный манипулятор с четырьмя степенями свободы (рис. 1) и гидравлическим приводом. Модель динамики манипулятора экскаватора может быть получена при помощи уравнений Лангранжа или Ньютона-Эйлера и для компактности представлена в виде следующего матричного уравнения [3]:

$$D(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + B(\dot{\theta}) + M_L = M, (1)$$

где:  $D(\theta) = [d_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  - положительно определенная матрица сил инерции манипулятора;  $C(\theta, \dot{\theta}) = [c_{i,j}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  - матрица, включающая все центробежные и кориолисовы члены;  $G(\theta) = [g_i]^T \in \mathbf{R}^n$  - вектор сил гравитации;  $B(\dot{\theta}) = [b_i \dot{\theta}_i]^T \in \mathbf{R}^n$  - вектор сил трения;  $M = [M_i]^T \in \mathbf{R}^n$  - вектор развиваемых гидроприводом управляющих моментов;  $M_L = [M_{L_i}]^T \in \mathbf{R}^n$  - вектор моментов сил сопротивления, возникающих при взаимодействии ковша с грунтом;  $i = \overline{1,4}$ ;  $j = \overline{1,4}$ ;  $n$  - число степеней свободы экскаватора, при классической компоновке (рис. 1)  $n = 4$ .

Будем считать, что  $\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0$  (плоская задача), тогда элементы матриц в (1) с индексами  $i = 1, j = 1$  не рассматриваются, и

$$d_{44} = I_4 + m_4 r_4^2, (2)$$

$$d_{33} = d_{44} + I_3 + m_3 r_3^2 + m_4 l_3 (l_3 + 2r_4 \cos(\theta_4 + \varphi_4)), (3)$$

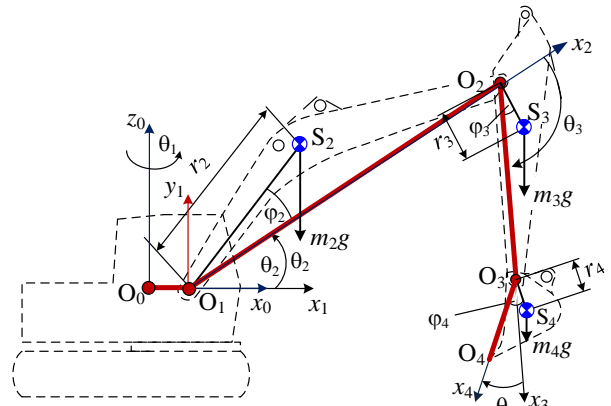


Рис. 1. К определению уравнений динамики манипулятора экскаватора.

$$d_{22} = d_{33} + I_2 + m_2 r_2^2 + m_3 l_2 (l_2 + 2r_3 \cos(\theta_3 + \varphi_3)) + m_4 l_2 (l_2 + 2l_3 \cos \theta_3 + 2r_4 \cos(\theta_{34} + \varphi_4)), (4)$$

$$d_{34} = d_{43} = d_{44} + m_4 l_3 r_4 \cos(\theta_4 + \varphi_4), (5)$$

$$d_{24} = d_{42} = d_{34} + m_4 l_2 r_4 \cos(\theta_{34} + \varphi_4), (6)$$

$$d_{23} = d_{32} = d_{24} + I_3 + m_3 r_3 (r_3 + l_2 \cos(\theta_3 + \varphi_3)) + m_4 l_3 (l_3 + l_2 \cos \theta_3 + r_4 \cos(\theta_4 + \varphi_4)), (7)$$

$$c_{22} = -m_3 l_2 r_3 \sin(\theta_3 + \varphi_3) \dot{\theta}_{23} - m_4 l_2 (l_3 \dot{\theta}_{23} \sin \theta_3 + r_4 \sin(\theta_{34} + \varphi_4) \dot{\theta}_{234}), (8)$$

$$c_{23} = -m_3 l_2 r_3 \sin(\theta_3 + \varphi_3) \dot{\theta}_{23} - m_4 l_2 (l_3 \dot{\theta}_{23} \sin \theta_3 + r_4 \dot{\theta}_{234} \sin(\theta_{34} + \varphi_4)), (9)$$

$$c_{24} = -m_4 l_2 r_4 \dot{\theta}_{234} \sin(\theta_{34} + \varphi_4), (10)$$

$$c_{32} = l_2 \dot{\theta}_2 (m_4 l_3 \sin \theta_3 + m_3 r_3 \sin(\theta_3 + \varphi_3)) - m_4 l_3 r_4 \dot{\theta}_{234} \sin(\theta_4 + \varphi_4), (11)$$

$$c_{33} = c_{34} = -m_4 l_3 r_4 \dot{\theta}_{234} \sin(\theta_4 + \varphi_4), (12)$$

$$c_{42} = m_4 r_4 \dot{\theta}_2 (l_2 \sin(\theta_{34} + \varphi_4) + l_3 \sin(\theta_4 + \varphi_4)) + m_4 l_3 r_4 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_4 + \varphi_4), (13)$$

$$c_{43} = m_4 l_3 r_4 \sin(\theta_4 + \varphi_4), (14)$$

$$c_{44} = 0, (15)$$

$$g_2 = g(m_3 + m_4) l_2 \cos \theta_2 + g m_2 r_2 \cos(\theta_2 + \varphi_2), (16)$$

$$g_3 = g m_4 l_3 \cos(\theta_{23}) + g m_3 r_3 \cos(\theta_{23} + \varphi_3), (17)$$

$$g_4 = g m_4 r_4 \cos(\theta_{234} + \varphi_4), (18)$$

где:  $I_2, I_3, I_4$  - моменты инерции стрелы, рукояти и ковша относительно осей их вра-

щения, соответственно,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3$ ;  $\theta_{234} = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ; а остальные параметры указаны на рис. 1.

Начнем анализ свойств уравнений динамики экскаватора с первого слагаемого в уравнении (1). Рассмотрим сначала диагональные элементы (2) – (4) матрицы  $\mathbf{D}(\theta)$ . Выражение (2) для  $d_{44}$  представляет собой выражение для момента инерции ковша относительно оси, проходящей через т.  $O_3$  (рис. 1). Выражение (3) для  $d_{33}$  содержит слагаемые, отображающие момент инерции ковша, момент инерции рукояти относительно т.  $O_2$ , и слагаемые, определяющие связь между рукоятью и ковшом. Соответственно, (4) содержит как слагаемые  $d_{44}$  и  $d_{33}$ , так и слагаемые, определяющие момент инерции стрелы относительно т.  $O_1$ , а также слагаемые, определяющие влияние ковша и рукояти на стрелу. Таким образом, коэффициент  $d_{22}$  учитывает момент инерции стрелы, когда рукоять и ковш неподвижны, т.е.  $d_{22}$  интерпретируется как общий момент инерции всех звеньев, относительно оси поворота стрелы. В общем случае диагональные элементы  $d_{ij}$  при  $i = j$  матрицы  $\mathbf{D}(\theta)$  связывают момент, действующий в  $i$ -м сочленении, с ускорением  $i$ -й обобщенной координаты.

При движении стрелы с ускорением, на рукоять и ковш действуют дополнительные сила реакции и момент, которые учитываются коэффициентом  $d_{32}$ . В общем случае, недиагональные элементы  $d_{ij}$  при  $i \neq j$  матрицы  $\mathbf{D}(\theta)$  определяют моменты (или силы), возникающие в  $i$ -м звене под действием ускорения  $j$ -го звена.

На рис. 2 приведены зависимости элементов матрицы сил инерции  $\mathbf{D}(\theta)$  от положения звеньев манипулятора экскаватора III-й размерной группы. Значения параметров экскаватора (рис. 1) приведены в табл. 1. Рис. 2 а,б отображает изменение диагональ-

ных элементов  $d_{33}$  и  $d_{22}$ , а рис. 2 в-д – недиагональных элементов.

Таблица 1

Значения параметров экскаватора

Параметр	Стрела	Рукоять	Ковш
Длина, $l$ [мм]	5160	2590	1330
Расстояние до центра масс, $r$ [мм]	2710	640	650
Масса, $m$ [кг]	1566	735	432
Момент инерции $I$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	14250,6	727,7	224,6
Угол $S_i O_{i-1} O_i$ , $\varphi$ [рад]	0,2566	0,3316	0,3944
Объём, $q$ [ $\text{м}^3$ ]	–	–	0,6

Заметим, что элемент  $d_{44}$  представляет собой момент инерции ковша и зависит лишь от его массы и массы грунта в ковше. Кроме того, поскольку матрица  $\mathbf{D}(\theta)$  симметрична, то  $d_{ij} = d_{ji}$ .

Рассмотрим теперь второе слагаемое в уравнении (1) динамики ЭГ, т.е. вектор  $\mathbf{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$ . В общем случае, элементы  $c_{ij}$  матрицы  $\mathbf{C}$  удовлетворяют следующему уравнению:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{\theta}_k, \quad (19)$$

где:  $i$  – номер звена манипулятора ЭГ.

Из (19) видно, что компоненты вектора  $\mathbf{C}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$  содержат слагаемые, пропорциональные квадрату от угловых скоростей звеньев манипулятора экскаватора, а также слагаемые, пропорциональные произведению этих скоростей.

Наличие слагаемых  $c_{ij} \dot{\theta}_j^2$  обусловлено действием на  $i$ -е звено центробежной силы за счёт движения  $j$ -го звена. Аналогично, вращение  $j$ -го звена вызывает момент, возникающий из-за центробежной силы в  $i$ -м звене. Заметим, что  $c_{iii} = 0$ . Слагаемые  $c_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k$ , пропорциональные произведению присоединённых скоростей, отображают

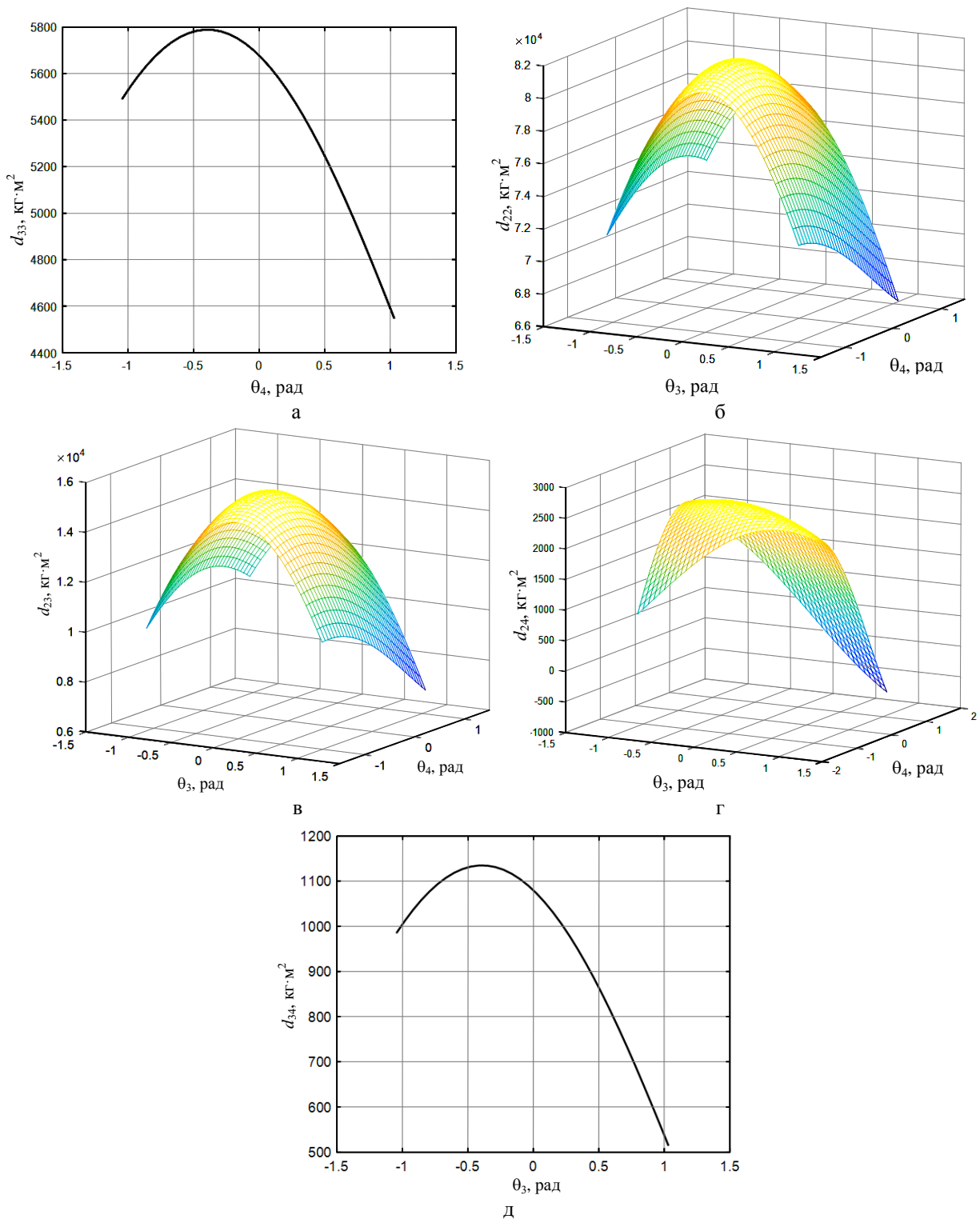


Рис. 4. Зависимость элементов матрицы  $\mathbf{D}(\theta)$  от положения звеньев манипулятора ЭГ: а,б – диагональные элементы; в-д – недиагональные элементы.

действие кориолисовых сил, порождаемых в  $i$ -м звене скоростями  $j$ -го и  $k$ -го звеньев.

Компоненты (16) – (18) вектора  $\mathbf{G}(\theta)$  в уравнении (1) характеризуют силы, с которыми последующие звенья манипулятора

экскаватора воздействуют на предыдущие звенья под действием силы тяжести и присутствуют, даже когда экскаватор находится в покое.

Момент, действующий на стрелу, рукоять и ковш экскаватора вследствие силы

тяжести, существенно зависит от их текущего положения в пространстве. Очевидно, что чем сильнее они вытянуты вдоль горизонтальной оси  $O_0x_0$ , тем большие значения принимают гравитационные моменты. На рис. 3,4 отображены изменения

гравитационных моментов при изменении обобщенных координат, т.е. углов поворота  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ , и  $\theta_4$  стрелы, рукояти и ковша, соответственно, для экскаватора с рассмотренными ранее параметрами (табл. 1).

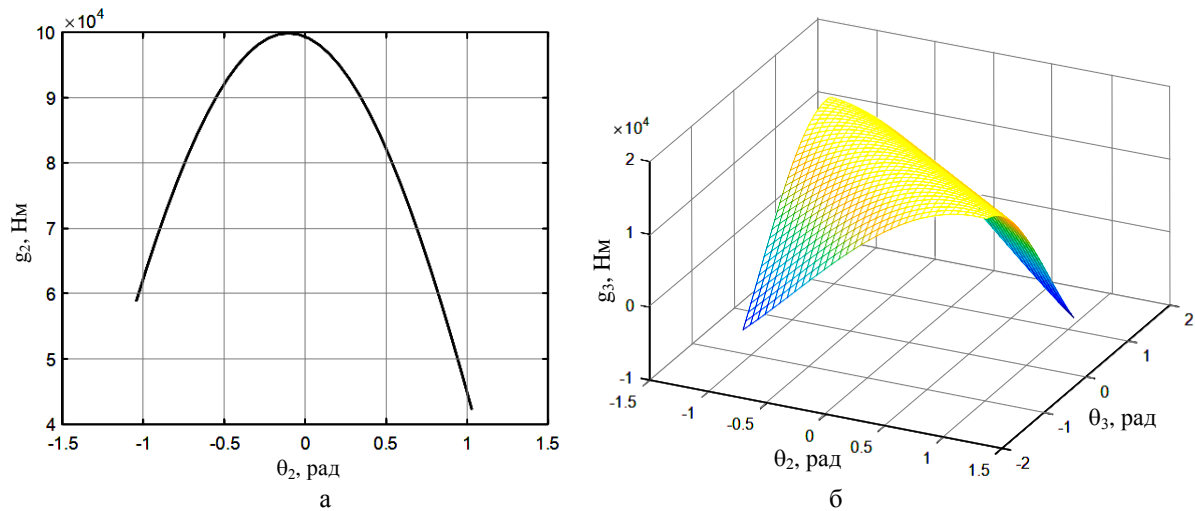


Рис. 3. Изменение гравитационного момента: а – на стреле, б – на рукояти.

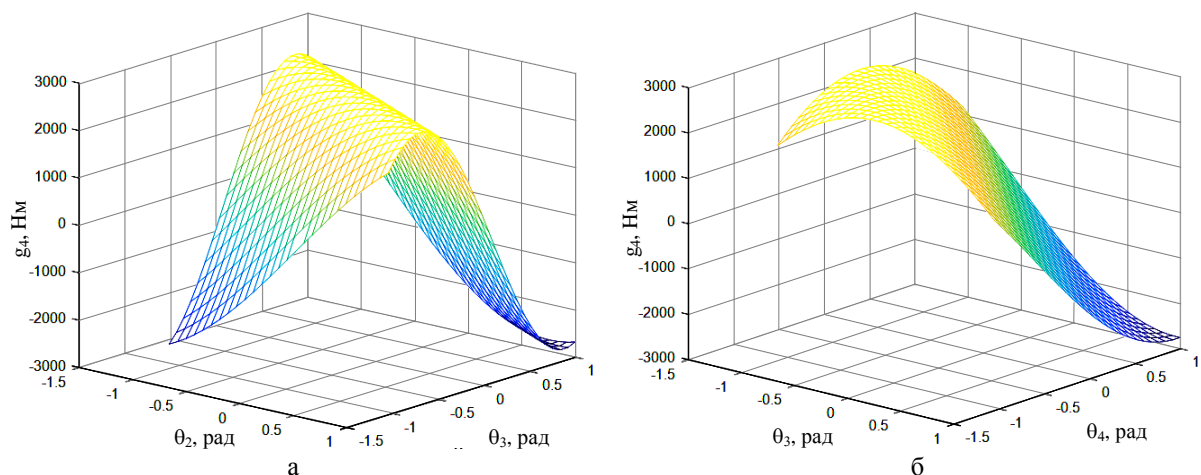


Рис. 4. Изменение гравитационного момента на ковше: а – ковш зафиксирован, поворачиваются стрела и рукоять; б – стрела неподвижна, поворачиваются рукоять и ковш.

Имея зависимости, приведенные на рис. 3 и рис. 4, а также оценки масс стрелы, рукояти и ковша, целесообразно в систему управления рабочим циклом экскаватора [5] добавить контур компенсации гравитационных моментов, что повысит эффективность использования системы управления.

**Выводы.** Таким образом, уравнения динамики манипулятора универсального одноковшового гидравлического экскаватора характеризуются зависимыми от простран-

ственного положения манипулятора моментами инерции, моментами сил тяжести, моментами, вызванными взаимным влиянием звеньев друг на друга, а также присутствием центробежного и кориолисова эффектов.

Знание свойств уравнений динамики позволяет синтезировать систему управления рабочим процессом ЭГ, обеспечивающую минимизацию расхода энергии на выполнение рабочих операций при высоком их качестве.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Leica iCON excavate iXE3. Advanced 3D Excavator Control System [Electronic source]. – Access mode: [http://www.leica-geosystems.com/en/Leica-iCON-excavate-iXE3\\_81272.htm](http://www.leica-geosystems.com/en/Leica-iCON-excavate-iXE3_81272.htm) – Title from a screen.
2. Sulaiman H. Modern manned, unmanned and teleoperated excavator system / H. Sulaiman, M. N. A. Saadun, A. A. Yusof // Journal of Mechanical Engineering and Technology. – 2015. – V. 7. – N 1. – P. 57-68.
3. Кириченко И. Г. Регулятор с вычисляемым моментом для управления рабочим оборудованием экскаватора / И. Г. Кириченко, А. Г. Гурко // Строительство, материаловедение, машиностроение : сб. науч. тр. / Приднепр. гос. акад. стр-ва и архитектуры. – Днепропетровск, 2013. – Вып. 72: Подъемно-транспортные, строительные и дорожные машины и оборудование. – С. 210-220.
4. Gurko A. Guaranteed Control of a Robotic Excavator During Digging Process / A. Gurko, O. Sergiyenko, et al. // In: 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, Colmar, France. – 2015. – V. 2. – P. 52-59.
5. Дуданов И. В. Автоматизация исполнительных систем гидравлического экскаватора: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук: спец. 05.13.06 / И. В. Дуданов; Самарский государственный архитектурно-строительный университет. – Самара, 2008. – 16 с.
6. Акинфиев А. А. Создание системы управления операцией копания для одноковшового гидравлического экскаватора с целью повышения эффективности его работы: дис. канд. техн. наук: 05.05.04 / Акинфиев Алексей Алексеевич. – М.: 1983. – 235 с.
7. Towarek Z. Dynamics of a Single-bucket Excavator on a Deformable Soil Foundation During the Digging of Ground / Z. Towarek // International Journal of Mechanical Sciences. – 2003. – V. 45. – N 6-7. – P. 1053-1076.
8. Павлов В. П. Алгоритм расчета силы и энергоемкости резания грунта по траектории большой кривизны / В. П. Павлов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 1. – С. 185-188.
9. Patel B. P., Evaluation of bucket capacity, digging force calculations and static force analysis of mini hydraulic backhoe excavator / B. P. Patel, J. M. Prajapati // Machine Design. – 2012. – V. 4. – N. 1. – P. 1821-1259.
10. Kim Y. B. Dynamically optimal trajectories for earthmoving excavators / Y. B. Kim, J. Ha, H. Kang, P. Y. Kim, J. Park, F. C. Park // Automation in Construction. – 2013. – V. 35. – P. 568-578.

## REFERENCES

1. Leica iCON excavate iXE3. Advanced 3D Excavator Control System [Electronic source]. Available at: [http://www.leica-geosystems.com/en/Leica-iCON-excavate-iXE3\\_81272.htm](http://www.leica-geosystems.com/en/Leica-iCON-excavate-iXE3_81272.htm).
2. Sulaiman H., Saadun M. N.A. and Yusof A.A. Modern manned, unmanned and teleoperated excavator system. Journal of Mechanical Engineering and Technology, 2015, no. 7(1), pp. 57-68.
3. Kirichenko I.G. and Gurko A.G. *Regulyator s vyichislyaemyim momentom dlya upravleniya rabochim oborudovaniem ekskavatora* [Computed torque controller for control of a backhoe equipment]. Stroitelstvo, materialovedenie, mashinostroenie – [Construction, materials science, mechanical engineering]. PDABA. Dnipropetrovsk, 2013, no. 72, pp. 210-220. (in Russian).
4. Gurko A., Sergiyenko O., et al. Guaranteed Control of a Robotic Excavator During Digging Process. In: 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. Colmar, France, 2015, no. 2, pp. 52-59.
5. Dudanov I.V. *Avtomatizatsiya ispolnitelnykh sistem gidravlicheskogo ekskavatora. Avtoreferat kand.* [Automation of actuation systems of an hydraulic excavator. Abstract of Ph.D. dissertation]. Samara State University of Civil Engineering. Samara, 2008, 16 p. (in Russian).
6. Akinfiev A.A. *Sozдание sistemy upravleniya operatsiy kopaniya dlya odnokovshovogo gidravlicheskogo ekskavatora s tselyu povysheniya effektivnosti ego raboty. Ph.D. dissertation.* [Creating of a control system of digging operation for a single-bucket hydraulic excavator in order to increase its effectiveness. Ph.D. dissertation]. Moscow, 1983, 235 p. (in Russian).
7. Towarek Z. Dynamics of a Single-bucket Excavator on a Deformable Soil Foundation During the Digging of Ground. International Journal of Mechanical Sciences, 2003, no. 45 (6-7), pp. 1053-1076.
8. Pavlov V.P. *Algoritm rascheta sily i energoemkosti rezaniya grunta po traektorii bolshoy krivizny* [Algorithm of calculation of force and power consumption of cutting of the ground on the trajectory of the big curvature]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta [The Bulletin of Voronezh State Technical University], 2011, no. 7 (1), pp. 185-188. (in Russian).
9. Patel B.P. and Prajapati J.M. Evaluation of bucket capacity, digging force calculations and static Force analysis of mini hydraulic backhoe excavator. Machine Design, 2012, no. 4(1), pp. 1821-1259.
10. Kim Y.B., Ha J., Kang H., Kim P.Y., Park J. and Park F.C. Dynamically optimal trajectories for earthmoving excavators. Automation in Construction, 2013, no. 35, pp. 568-578.