 ISSN 2415-7031

УДК 519.85

ПОЛУОПРЕДЕЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

КОСОЛАП А. И. [1*], *д. физ-мат. н., проф.*
ПЕРЕТЯТЬКО А.С. [2], *к. физ-мат. н.*

[1*] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепр, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-7338-6707
[2] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепр, Украина, ORCID ID: 0000-0002-4060-4648

Аннотация. ***Цель.*** В работе рассматривается класс задач квадратичной оптимизации с булевыми переменными. Такие задачи возникают в области рыночной экономики, планировании, управлении проектами, искусственном интеллекте, оптимальном проектировании и являются NP-сложными. В данной работе предлагается процедура для нахождения нижних и верхних оценок целевых функций квадратичных задач с булевыми переменными. ***Методика.*** В данной работе предлагается преобразовывать квадратичные задачи с булевыми переменными в общую задачу квадратичной оптимизации, а затем применять для ее решения метод полуопределенной релаксации. ***Результаты.*** Применение полуопределенной релаксации позволило находить нижние оценки целевой функции в квадратичных задачах с булевыми переменными или точку глобального минимума с заданной точностью. Причем, в отличие от других методов, проверка оптимальности найденного решения не требует экспоненциального времени и достаточно проста. Верхняя оценка целевой функции, которая находится с помощью использования нижней оценки полуопределенной релаксации в качестве начальной точки при решении исходной задачи методами локального поиска, в 91 % случаев совпала с глобальным минимумом начальной задачи. ***Научная новизна.*** Разработана новая процедура нахождения верхних и нижних оценок целевой функции. ***Практическая значимость.*** Рассмотренная методика решения может быть использована для нахождения решения прикладных задач, которые могут быть сформулированы в виде квадратичных задач с булевыми переменными. Сравнительные эксперименты подтверждают эффективность данного подхода для решения таких задач.

Ключевые слова: квадратичная оптимизация, булевая оптимизация, квадратичные задачи с булевыми переменными, полуопределенная оптимизация, полуопределенная релаксация, нижние и верхние оценки

НАПІВВИЗНАЧЕНА ОПТИМІЗАЦІЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТИЧНИХ ЗАДАЧ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ

КОСОЛАП А. І. [1*], *д. фіз-мат. н., проф.*
ПЕРЕТЯТЬКО А.С. [2], *к. фіз-мат. н.*

[1*] Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-7338-6707
[2] Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпро, Україна, ORCID ID: 0000-0002-4060-4648

Анотація. ***Мета.*** У роботі розглядається клас задач квадратичної оптимізації з булевими змінними. Такі задачі виникають в області ринкової економіки, планування, управління проектами, штучному інтелекті, оптимальному проектуванні та є NP-складними. У даній роботі пропонується процедура для знаходження нижніх і верхніх оцінок цільових функцій квадратичних задач з булевими змінними. ***Методика.*** У даній роботі пропонується перетворювати квадратичні задачі з булевими змінними в загальну задачу квадратичної оптимізації, а потім застосовувати для її розв'язання метод напіввизначеної релаксації. ***Результати.*** Застосування напіввизначеної релаксації дозволило знаходити нижні оцінки цільової функції в квадратичних задачах з булевими змінними або точку глобального мінімуму з заданою точністю. Причому, на відміну від інших методів, перевірка оптимальності знайденого розв'язку не вимагає експоненціального часу і є досить простою. Верхня оцінка цільової функції, яка знаходиться за допомогою використання нижньої оцінки напіввизначеної релаксації в якості початкової точки під час розв'язування вихідної задачі методами локального пошуку, в 91% випадків збіглася з глобальним мінімумом початкової задачі. ***Наукова новизна.*** Розроблено нову процедуру знаходження верхніх і нижніх оцінок цільової функції. ***Практична значимість.*** Розглянута методика розв'язання може бути використана для знаходження розв'язку прикладних задач, які можуть бути сформульовані у вигляді квадратичних задач з булевими змінними. Порівняльні експерименти підтверджують ефективність даного підходу для розв'язування таких задач.

Ключові слова: квадратична оптимізація, булева оптимізація, квадратичні задачі з булевими змінними, напіввизначена оптимізація, напіввизначена релаксація, нижні і верхні оцінки

SEMIDEFINITE OPTIMIZATION FOR SOLVING BOOLEAN QUADRATIC PROBLEMS

KOSOLAP A. I. [1*], *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.*
PERETIATKO A. S. [2], *Ph.D. (Phys.-Math.)*

[1*] Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-7338-6707
[2] Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipro, 49005, Ukraine, ORCID ID: 0000-0002-4060-4648

Abstract. ***Purpose.*** We consider boolean quadratic optimization problems. Such problems arise in market economy, planning, project management, artificial intelligence, optimal design and are NP-hard. In this paper we propose a procedure for finding the lower and upper bounds of the objective functions of boolean quadratic problems. ***Methodology.*** In this paper we propose to convert the boolean quadratic problem to the general quadratic optimization problem, and then apply semidefinite relaxation to it. ***Findings.*** The using of semidefinite relaxation has allowed us to find lower bounds of the objective function or global minimum point with a given accuracy in boolean quadratic problems. Moreover, unlike other methods, testing the optimality of the found solution doesn`t require exponential time and is quite simple. The upper bound of the objective function, which is found by using the lower estimate of semidefinite relaxation as a starting point for solving the original problem by local search methods, in 91% of cases coincided with the global minimum of the initial problem. ***Originality.*** A new procedure for finding the upper and lower bounds of objective function was proposed. ***Practical value.*** The considered method of solution can be used for finding the solution in applications that can be formulated as boolean quadratic problems. Comparative numerical experiments confirm the efficiency of this approach to solving such problems.

Keywords: quadratic optimization, boolean optimization, boolean quadratic problems, semidefinite optimization, semidefinite relaxation, lower and upper bounds

Постановка проблемы

Оптимизационные модели сложных систем в области рыночной экономики, планирования, управления проектами, искусственном интеллекте, оптимальном проектировании, химических технологиях, компьютерных системах приводят к необходимости решения задач, которые можно представить в виде общих квадратичных задач, то есть задач, в которых необходимо минимизировать квадратичную целевую функцию при квадратичных ограничениях (функции ограничений и целевая функция являются непрерывными и гладкими, но могут быть невыпуклые). Задача конечномерной минимизации квадратичной функции при квадратичных ограничениях имеет эффективное решение, если целевая функция и ограничения – выпуклые. Если же по крайней мере одна из функций не является выпуклой, то такая задача становится достаточно сложной и в общем случае многоэкстремальной.

Если в квадратичной задаче имеются булевые ограничения на переменные, то путем простой замены булевых переменных квадратичным условием $x_i(x_i-1)=0,\ i=1,\dots,n$, где теперь x_i могут принимать произвольные значения, мы получим общую задачу квадратичной оптимизации. Естественно, что допустимыми будут только значения 0 или 1. К квадратичной задаче с булевыми переменными сводится задача поиска максимального разреза графа max-cut [11], задача раскраски графа минимальным количеством цветов [6], задачи кластеризации данных [7] и др.

Анализ последних достижений

В настоящее время для решения общих квадратичных задач не существует полиномиальных методов. Методы ветвей и границ требует экспоненциального времени для нахождения переменных моделей и поэтому могут быть использованы только для решения задач небольшой размерности [5]. Методы случайного поиска иногда позволяют найти оптимальные решения, но проверка этой оптимальности требует экспоненциального времени. Для решения сложных тестовых задач с известным решением эти методы иногда находят оптимальную точку, но во многих случаях эти решения далеки от оптимальных [8].

Рассмотренные выше прикладные задачи формулируются как задачи общей квадратичной оптимизации. Затем с помощью выпуклой полуопределенной релаксации [4], которая использует преобразование квадратичного выражения $x^T Ax$ в скалярное произведение матриц $A\bullet xx^T$ или $A\bullet X$, где X – положительно полуопределенная матрица ранга единица, они превращаются в задачи полуопределенной оптимизации.

 ISSN 2415-7031

Цель

В данной работе предлагается преобразовывать квадратичные задачи с булевыми переменными в общую задачу квадратичной оптимизации, а затем применять для ее решения метод полуопределенной релаксации.

Целью данной работы является разработка процедуры нахождения нижних и верхних оценок целевых функций квадратичных задач с булевыми переменными.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу булевой квадратичной оптимизации

$$\min\{c^T x \mid Ax \le b,\ x_i = 0 \vee 1,\ x \in R^n\}, \tag{1}$$

где c – n-мерный вектор; A – матрица размерности $(m \times n)$; x – n-мерный вектор с компонентами 0 или 1; R^n – n-мерное евклидово пространство.

Предлагаемая методика решения задач применима и для более общей задачи квадратичной оптимизации с квадратичными ограничениями и булевыми переменными:

$$\min\left\{ x^T Q_0 x + q_0^T x \;\middle|\; \begin{array}{l} x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i,\ i = 1, \dots, m, \\ x_i = 0 \vee 1,\ x \in R^n \end{array} \right\}, \tag{2}$$

где все Q_i – симметричные матрицы размерности $(n \times n)$; q_i, x – n-мерные вектора; r_i – скаляр.

Заменим в задаче (2) булевые переменные квадратичным условием $x_i(x_i - 1) = 0,\ i = 1, \dots, n$. Таким образом, задача (2) превращается в общую квадратичную задачу

$$\min\left\{ x^T Q_0 x + q_0^T x \;\middle|\; \begin{array}{l} x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i, i = 1, \dots, m, \\ x^T Q_i x + q_i^T x = r_i, i = m+1, \dots, p, \\ x \in E^n \end{array} \right\}. \tag{3}$$

Преобразование квадратичной задачи (2) к задаче полуопределенной оптимизации

Используем для решения задачи (2-3) полуопределенную релаксацию [4]. Учитывая, что $x^T Q x = Q \bullet xx^T = Q \bullet X$ [8], преобразуем задачу (3) к задаче полуопределенной оптимизации

$$\min\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 \bullet X \;\big|\; \bar{A}_i \bullet X \preceq 0,\ i = 1, \dots, m, \\ \qquad\qquad \bar{A}_i \bullet X = 0,\ i = m+1, \dots, p, \\ \qquad\qquad X \succeq 0 \end{array} \right\}, \tag{4}$$

где $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix}$;

$$x^T Q_i x + q_i^T x - r_i = \begin{pmatrix} -r_i & \dfrac{q_i^T}{2} \\ \dfrac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -r_i & \dfrac{q_i^T}{2} \\ \dfrac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet X = \bar{A}_i \bullet X,\ i = 0, 1, \dots, p.$$

Задача (4) является задачей полуопределенной оптимизации [3]. Наиболее эффективными для ее решения являются методы внутренней точки [9, 10, 12], метод расширенного лагранжиана [13] и полуопределенный симплекс-метод [1].

Нахождение верхних и нижних оценок решения задачи (2)

Преобразованная задача (4) будет эквивалентна задаче (3), если решением задачи (4) будет положительно полуопределенная матрица X^* ранга единица. Ввести в ограничения задачи (4) условие, что ранг матрицы X должен быть равен единице, невозможно, так как это условие проверяется алгоритмически. Поэтому данное условие в задаче (4) опускают, оставляя только положительную полуопределенность матрицы X. Конечно, такое ослабление ограничений может приводить к уменьшению целевой функции и к недопустимому решению, если решение задачи (4) достигается не в крайнем луче конуса положительно полуопределенных матриц. Таким образом, после решения задачи (4) в общем случае будет найдена нижняя оценка решения задачи (2).

Для нахождения верхней оценки запишем задачу (1-2) в общем виде

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i = 1, \dots, p, x \in E^n\}, \tag{5}$$

где все $f_i(x)$ – квадратичные функции (ограничения-равенства можно заменить двумя ограничениями-неравенствами).

Найденное решение задачи (5) используем в качестве начальной точки для решения задачи (2) прямо-двойственным методом внутренней точки [10]. Преобразуем ограничения задачи (5) к равенствам

$$\min\{f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^{p} \ln(z_i) \mid f_i(x) + z_i = 0,\ i = 1, \dots, p\},$$

тогда функция Лагранжа этой задачи будет иметь вид

$$L(x, y, z) = f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^{p} \ln(z_i) + \sum_{i=1}^{p} y_i (f_i(x) + z_i),$$

условия минимума которой равны

$$\nabla f_0(x) - \nabla f_i(x)^T y = 0,$$
$$f_i(x) + z_i = 0, i = 1, \dots, p,$$
$$-\mu Z^{-1} e + y = 0.$$

 ISSN 2415-7031

Метод Ньютона для этой нелинейной системы уравнений на каждой итерации решает линейную систему уравнений

$$\begin{bmatrix} G(x,y) & A^T(x) & 0 \\ A(x) & 0 & I \\ 0 & Z & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_0(x) - A^T(x)y \\ -f(x) - z \\ \mu e - ZYe \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $G(x,y)$ – гессиан функции Лагранжа; $A(x) = \nabla f(x)$; I – единичная матрица; $e = (1,\ldots,1)$;
$Y = diag(y_1,\ldots,y_p)$;
$f(x) = (f_1(x),\ldots,f_p(x))$;
$Z = diag(z_1,\ldots,z_p)$;

Решение линейной системы (6) используем для перехода в следующую точку

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k \Delta x^k,$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_k \Delta y^k,$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_k \Delta z^k.$$

На каждой итерации значение параметра μ убывает по формуле $\mu = x^T z / n$. Параметр α выбирается так, чтобы $z^{k+1} \geq 0$. Показано, что данный прямо-двойственный метод внутренней точки глобально сходится к точке локального минимума за полиномиальное время [9].

Сравнительные численные эксперименты

Рассмотрим квадратичную задачу с булевыми переменными на примере задачи кластеризации данных.

Рассмотрим множество m точек $\{a^1,\ldots,a^m\}$ в n-мерном евклидовом пространстве. Необходимо разбить это множество на 2 кластера таким образом, чтобы каждая точка попала только в один кластер.

Рассмотрим неориентированный граф G с вершинами $M = \{1,\ldots,m\}$ и множеством дуг E. Точки $\{a^1,\ldots,a^m\}$ являются вершинами этого графа. Пусть $w_{ij} = w_{ji}$ – вес дуги (a_i, a_j). Для нашего случая вес дуги w_{ij} является расстоянием между точками a_i та a_j. Для заданного целого $k \in 1,\ldots,m-1$ задача k-clustering [2] состоит в нахождении подмножества S, которое включает k вершин, таких, что суммарный вес дуг подграфа, порожденного S, является максимальным.

Пусть W – матрица весов дуг графа G. Тогда задачу k-clustering можно записать в виде задачи булевой оптимизации

$$\max\left\{ \frac{1}{2} x^T W x \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = k,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = 1,\ldots,m \right\}, \quad (7)$$

где x_i – флаг, который равен 1, если вершина a_i принадлежит подмножеству S, и который равен нулю в противоположном случае; x – вектор-столбец размерности m, где $x_1,\ldots,x_m$ – его компоненты; W – матрица весов размерности $m \times m$, (i,j)-й элемент которой равен w_{ij}.

Задача (7) является общей квадратичной задачей с булевыми переменными. С помощью описанной выше полуопределенной релаксации сведем задачу (7) к задаче полуопределенной оптимизации.

Условие $x_i = 0 \vee 1$ перепишем в квадратичном виде $x_i(x_i - 1) = 0$. Как показали численные эксперименты, в задаче полуопределенной оптимизации это условие удовлетворяет любое решение $X = xx^T$. Поэтому введем новую переменную z – вектор-столбец размерности n, где $z_1,\ldots,z_m$ – компоненты вектора z, $z_i = x_i + 1$, $x_i = z_i - 1$, и заменим условие булевых переменных условием $(z_i - 1)(z_i - 2) = 0$, а матрицу решения будем искать в виде

$$X = (z-1)(z-1)^T,$$

где $(z-1)^T = (z_1 - 1, z_2 - 1, \ldots, z_m - 1)$.

Тогда перепишем (7) в виде

$$\max\left\{ \frac{1}{2}(z-1)^T W (z-1) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum z_i = k + m, \\ (z_i - 1)(z_i - 2) = 0, \\ i = 1,\ldots,m \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Опустим константу и перепишем (8) в виде

$$\min\left\{ -(z-1)^T W (z-1) \;\middle|\; \begin{array}{l} (z_i - 1)(z_i - 2) = 0, \\ \sum z_i = k + m, \\ i = 1,\ldots,m \end{array} \right\}. \quad (9)$$

Задача (9) является общей квадратичной задачей, к которой можно применить полуопределенную релаксацию [4].

Перепишем (9) в виде

$$\min\left\{ -W \bullet Z \mid A_i \bullet Z = 0,\ i = 1,\ldots,m+1,\ Z \succeq 0 \right\}, \quad (10)$$

где $Z = \begin{pmatrix} 1 & z^T \\ z & zz^T \end{pmatrix}$ размерности $(m+1)\times(m+1)$;

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} (-k-m) & 0{,}5 & \ldots & 0{,}5 \\ 0{,}5 & & & \\ \ldots & & 0 & \\ 0{,}5 & & & \end{pmatrix};$$

$$A_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & \ldots & -1.5 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & & & \\ \ldots. & & & & & \\ -1.5 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots. & & & & & \\ 0 & \ldots & & & & \end{pmatrix} \end{array}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Задачу (10) решаем полуопределенным симплекс-методом [1] и получаем нижнюю оценку целевой функции задачи (7). Очевидно, что найденные z_i будут принадлежать промежутку [1; 2].

Если найденная матрица Z имеет ранг 1, тогда найденное решение будет являться глобальным минимумом задачи (7). Если же ранг матрицы Z больше 1, тогда найденное решение подставляем в качестве начальной точки в задачу (7), решаем ее методом внутренней точки и находим верхнюю оценку решения задачи (7). Численные эксперименты показывают, что в большинстве случаев при использовании решения полуопределенной релаксации (10) в качестве начальной точки, методы локального поиска сходятся к глобальному минимуму исходной задачи (7).

Пусть имеем 5 вершин $a_1(0,0)$, $a_2(0,3)$, $a_3(2,2)$, $a_4(3,0)$, $a_5(4,4)$. Нам необходимо найти подмножество S, которое включает 3 вершины, такие, что суммарный вес дуг подграфа, порожденного S, является максимальным.

Найдем расстояния между вершинами: $d_{12} = = d_{14} = 3$, $d_{13} = d_{35} = 2{,}8284$, $d_{15} = 5{,}6568$, $d_{23} = = d_{34} = 2{,}236$, $d_{24} = 4{,}242$, $d_{25} = d_{45} = 4{,}1231$.

Пусть W – матрица весов дуг графа G, такая что $w_{ij} = w_{ji} = d_{ij}$, $w_{ii} = 0$.

Запишем полученную задачу *k*-klustering в виде квадратичной задачи с булевыми переменными

$$\max\left\{ \frac{1}{2} x^T W x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = k,\ x_i = 0 \vee 1,\ i = 1,\ldots,n \right\}, \tag{11}$$

где x_i – флаг, который равен 1, если вершина a_i принадлежит подмножеству S, и который равен нулю в противоположном случае; k = 3 та n = 5 по условиям задачи.

Используя (10), перепишем (11) в виде задачи полуопределенной оптимизации

$$\min\left\{ -W \bullet Z \mid A_i \cdot Z = 0,\ i = 1,\ldots,6,\ Z \succeq 0 \right\}, \tag{12}$$

где $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & z^T \\ z & zz^T \end{pmatrix}$ размерности 6×6;

$$A_6 = \begin{pmatrix} -8 & 0{,}5 & \ldots & 0{,}5 \\ 0{,}5 & & & \\ \ldots & & 0 & \\ 0{,}5 & & & \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array} \\ A_i = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & \ldots & -1.5 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & & & \\ \ldots. & & & & & \\ -1.5 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots. & & & & & \\ 0 & \ldots & & & & \end{pmatrix} \end{array}, \quad i = 1,\ldots,5.$$

Решим (12) полуопределенным симплекс-методом [1]. Получим нижнюю оценку решения -41,49. Найденная точка равняется

$$z = (1.6335, 1.5956, 1.4690, 1.6151, 1.6869). \tag{13}$$

Для нахождения верхней оценки решения будем решать начальную задачу (11) методом внутренней точки, и в качестве начальной точки возьмем точку (13). Найденное решение $x = (1, 0, 0, 1, 1)$ является оптимальным (значение целевой функции равно -25,56).

Выводы

В данной работе класс квадратичных задач с булевыми переменными преобразуется к общей задаче квадратичной оптимизации, а затем для ее решения применяется метод полуопределенной релаксации. Применение полуопределенной релаксации позволило находить нижние оценки целевой функции в квадратичных задачах с булевыми переменными или точку глобального минимума с заданной точностью. Причем, в отличие от других методов, проверка оптимальности найденного решения не требует экспоненциального времени и достаточно проста (достаточно проверить ранг матрицы *X*). Проведенные многочисленные эксперименты для известных текстовых задач показали, что в 91,66% случаев предложенная процедура нахождения нижних и верхних оценок целевых функций квадратичных задач позволяет находить глобальный минимум исходной задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косолап, А. И. Численная эффективность методов полуопределенной оптимизации / А. И. Косолап, А. С. Перетятько // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 2. – С. 56–64.
2. Перетятько, А.С. Напіввизначена оптимізація для задачі кластеризації даних k-clustering / А.С. Перетятько // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичного моделювання». – Дніпродзержинськ, 25-27 травня 2016 р. – С. 57–60.
3. Blekherman, G. Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry / Grigoriy Blekherman, Pablo A. Parrilo, Rekha R. Thomas. – Електорон. дані (1 файл). – SIAM, 2013. – 476 p. – Режим доступу: http://www.math.washington.edu/~thomas/frg/frgbook/SIAMBookFinalv Nov12-2012.pdf. - Назва з екрана. - Перевірено 20.09.2016.
4. Ding, Y. On Equivalence of Semidefinite Relaxations for Quadratic Matrix Programming / Y. Ding, D. Ge, H. Wolkowicz. – Електорон. дані (1 файл). – 2010. – 23 p. – Режим доступу: www.optimization-online.org/DB_FILE/2010/04/2606.pdf. Назва з екрана. - Перевірено 21.09.2016.

5. Horst, R. Global Optimization: Deterministic Approaches /R. Horst, H. Tuy. – 3rd ed., Berlin: Springer–Verlag, 1996. – 727 p.

6. Karger D. Approximate Graph Coloring by Semidefinite programming / D. Karger, R. Motwani, M. Sudan. – Електорон. дані (1 файл). – 18 p. – Режим доступу: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=274791.

7. Karoussi, E. Data Mining K-Clustering Problem / E. Karoussi. –University of Agder, 2012. – 80 p. – Режим доступу: https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/137565/masteroppgave.pdf?sequence=1. Назва з екрана. - Перевірено 21.09.2016.

8. Kenneth, V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization / V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.

9. Nesterov, Y. E. Interior point polynomial algorithms in convex programming / Y. E. Nesterov, A. S. Nemirovskii // SIAM Studies in Applied Mathematics. – 2001. – Vol. 13. – SIAM: Philadelphia, USA. – 405 p.

10. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p. – Режим доступу: http://www.bioinfo.org.cn/~wangchao/maa/Numerical_Optimization.pdf. Назва з екрана. - Перевірено 21.09.2016.

11. O’Donnell R. Advanced Approximation Algorithms. Lecture 14: Semidefinite Programming and Max-Cut [Електронний ресурс] / R. O’Donnell. – Електорон. дані (1 файл). – 2008. – 6 p. – Режим доступу: www.cs.cmu.edu/ ~anupamg/adv-approx/lecture14.pdf. Назва з екрана. - Перевірено 20.09.2016.

12. Roumili, H. Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs / H. Roumili, A. Keraghel, A. Yassine // Applied Mathematical Sciences. – Електорон. дані (1 файл). – 2007. – Vol. 1. – No. 21. – P. 1009–1018. – Режим доступу: http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password21-24-2007/roumiliAMS21-24-2007.pdf. Назва з екрана. - Перевірено 21.09.2016.

13. Wen, Z. Alternating Direction Augmented Lagrangian Methods for Semidefinite Programming / Z. Wen, D. Goldfarb, W. Yin // Math. Prog. – Електорон. дані (1 файл). – 2010. – №2. – P. 203–230. – Режим доступу: http://mpc.zib.de/index.php/MPC/article/viewFile/40/20. Назва з екрана. - Перевірено 21.09.2016.

REFERENCES

1. Kosolap A.I. and Peretiatko A.S. *Chislennaya effektivnost metodov poluopredelennoy optimizatsii* [Numerical efficiency of semidefinite optimization methods]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of control and informatics], 2014, no. 2, pp. 56–64. (in Russian).

2. Peretiatko A.S. *Napivvyznachena optymizatsiia dlia zadachi klasterizatsii danykh k-clustering* [Semidefinite optimization for k-klustering problem]. *Materialy Vseukrainskoi naukovo-metodychnoi konferentsii «Problemy matematychnogo modeliuvannia (25.05–27.05.2016)»* [Proc. of the All Ukrainian Scientific and Methodical Conf. «Problems of mathematical modelling»]. Dniprodzerzinsk, 2016, pp. 57–60. (in Ukrainian).

3. Blekherman G., Parrilo P.A.and Rekha R.T. *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*. SIAM, 2013, 476 p. Available at: http://www.math.washington.edu/~thomas/frg/frgbook/SIAMBookFinalv Nov12-2012.pdf.

4. Ding Y., Ge D., Wolkowicz H. *On Equivalence of Semidefinite Relaxations for Quadratic Matrix Programming*. 2010, 23 p. Available at: www.optimization-online.org/DB_FILE/2010/04/2606.pdf.

5. Horst R., Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches*. 3rd ed., Berlin, Springer–Verlag, 1996, 727 p.

6. Karger D., Motwani R., Sudan M. *Approximate Graph Coloring by Semidefinite programming*. 18 p. Available at: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=274791.

7. Karoussi E. *Data Mining K-Clustering Problem*. University of Agder, 2012, 80 p. Available at: https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/137565/masteroppgave.pdf?sequence=1.

8. Kenneth V.P., Storn R.M., Lampinen J.A. *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005, 542 p.

9. Nesterov Y.E., Nemirovskii A. S. *Interior point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM: Philadelphia, 1994, Vol. 13, 405 p.

10. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical optimization*. Springer, 2006, 685 p.

11. O’Donnell R. *Advanced Approximation Algorithms. Lecture 14: Semidefinite Programming and Max-Cut.* 2008, 6 p. Available at: www.cs.cmu.edu/ ~anupamg/adv-approx/lecture14.pdf.

12. Roumili H., Keraghel A., Yassine A. *Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs*. Applied Mathematical Sciences, 2007, Vol. 1, No. 21, pp. 1009–1018. Available at: http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password21-24-2007/roumiliAMS21-24-2007.pdf.

13. Wen Z., Goldfarb D., Yin W. *Alternating Direction Augmented Lagrangian Methods for Semidefinite Programming*. Math. Prog, 2010, №2, pp. 203–230. Available at: http://mpc.zib.de/index.php/MPC/article/viewFile/40/20.