**УДК 519.8:004.94**

# ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

ЦЫБРИЙ Л. В.[1], *канд. физ.-мат. наук,* доц.,
МУЛЯР С. С.[2], *студ., маг.*

[1]Кафедра Прикладная математика и информационные технологии, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днипро, 49600, Украина, тел. +38 (056) 756-34-10, email: prmat@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-7427-0770
[2]Кафедра Прикладная математика и информационные технологии, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, Днипро, 49600, Украина, тел. +38 (050) 453-35-05, email: write@email.ua. ORCID ID: 0000-0002-6704-7781

**Аннотация.** ***Цель работы*** – создать модель управления сложной системой на основании статистических данных и найти оптимальное управление. ***Метод.*** Построение статистической модели сложной системы, отражающей все множество ее параметров и связей, – предмет многих исследований. Все они основаны на методах математической статистики и приводят к модели множественной регрессии [1; 2; 4]. Целью моделирования является не только оценка параметров функционирования системы, но и управление. Это приводит к необходимости решать задачу стохастического программирования [3]. Единого аналитического метода решения таких задач нет. В работе излагается один из подходов, позволяющий решить задачу поиска наилучшего управления с помощью имитационной модели, рассматривающей учет интервальных оценок регрессии как случайное воздействие, предусмотренное математической моделью стохастического программирования. Это позволяет найти не только точечные оценки детерминированного оптимального решения, что происходит при сведении задачи стохастического программирования к задаче нелинейного программирования. ***Результаты.*** Применение предлагаемого метода приводит к получению интервальных оценок управляемых переменных и функции цели задачи оптимизации, соответствующие интервальным оценкам регрессии объясняемых параметров на объясняющие параметры. ***Научная новизна.*** Предложен метод решения задачи управления сложной системой, позволяющий учесть стохастический характер модели и найти не только точечные, но и интервальные оценки оптимального решения. ***Практическая значимость.*** Интервальные оценки решения статистической модели, учитывающие случайный разброс статистических данных, необходимы для принятия правильного решения при выборе параметров проектируемой системы, что позволит учесть возможные нежелательные случайные воздействия.

**Ключевые слова:** *статистическая модель; множественная регрессия; стохастическое программирование; имитационная модель; интервальные оценки; оптимальное управление*

# ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ РОЗВ’ЯЗАННЯ СТАТИСТИЧНОЇ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ

ЦИБРІЙ Л. В.[1], *канд. фіз.-мат. наук*, доц.,
МУЛЯР С. С.[2], *студ., маг.*

[1]Кафедра Прикладна математика та інформаційні технології, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (0562) 46-98-10, e-mail: prmat@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-7427-0770
[2]Кафедра Прикладна математика та інформаційні технології, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, Дніпро, 49600, Україна, тел. +38 (050) 453-35-05, e-mail: write@email.ua, ORCID ID: 0000-0002-6704-7781

**Анотація.** ***Мета дослідження*** – створити модель управління складною системою на основі статистичних даних і знайти оптимальне управління. ***Метод.*** Побудова статистичної моделі складної системи, що відображає всю безліч її параметрів і зв'язків, – предмет багатьох досліджень. Усі вони засновані на методах математичної статистики і приводять до моделі множинної регресії [1,2,4]. Мета моделювання полягає не тільки в оцінюванні параметрів функціонування системи, а й в управлінні. Це викликає необхідність розв’язувати задачу стохастичного програмування [3]. Єдиного аналітичного методу розв’язання таких задач немає. У статті викладається один із підходів, що дозволяє розв’язати задачу пошуку найкращого управління за допомогою імітаційної моделі, що розглядає облік інтервальних оцінок регресії як випадковий вплив, передбачений математичною моделлю стохастичного програмування. Це дозволяє знайти не тільки точкові оцінки детермінованого оптимального рішення, що відбувається у разі зведенні задачі стохастичного програмування до задачі нелінійного програмування. ***Результати.*** Застосування запропонованого методу зумовлює отримання інтервальних оцінок керованих змінних і функції мети задачі оптимізації, відповідних інтервальним оцінками регресії пояснюваних параметрів на пояснювальні параметри. ***Наукова новизна.*** Запропоновано метод розв'язання задачі управління складною системою, що дозволяє врахувати стохастичний характер моделі і знайти не тільки точкові, а й інтервальні оцінки оптимального розв’язання. ***Практична***

***значимість.*** Інтервальні оцінки розв'язання статистичної моделі, що враховують випадковий розкид статистичних даних, необхідні для прийняття правильного рішення під час вибору параметрів проектованої системи, що дозволить урахувати можливі небажані випадкові впливи.

**Ключові слова:** *статистична модель; множинна регресія; стохастичне програмування; імітаційна модель; інтервальні оцінки; оптимальне управління*

# INTERVAL ESTIMATES OF THE SOLUTION STATISTICAL MODEL OF MANAGEMENT

TSIBRIY L. V.[1], *Cand. Sc. (Phys.-Math.), Ass. Prof.,*
MULIAR S. S.[2], *master student*
[1]Department of Applied Mathematics and Information Technologies, State Higher Educational Establishment «Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture», 24-A, Chernyshevskogo st., Dnipro, 49600, Ukraine, tel.+38 (0562) 46-98-10, e-mail: prmat@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-7427-0770
[2]Department of Applied Mathematics and Information Technologies, State Higher Educational Establishment «Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture», 24-A, Chernyshevskogo st., Dnipro, 49600, Ukraine, tel. +38 (050) 453-35-05, e-mail: write@email.ua, ORCID ID: 0000-0002-6704-7781

**Annotation.** ***Goal.*** Create a model of managing a complex system based on statistical data and find the optimal management solution. ***Method.*** The construction of a statistical model of a complex system that reflects the whole range of its parameters and relationships is the subject of many studies. All of them are based on methods of mathematical statistics and lead to the model of multiple regression [1,2,4]. The aim of the simulation is not only to evaluate the parameters of the system's operation, but also to manage it. This leads to the need to solve the problem of stochastic programming [3]. There is no single analytical method for solving such problems. The paper outlines one of the approaches that allows solving the problem of finding the best control with the help of the simulation model considering the consideration of interval regression estimates as a random effect provided by the mathematical model of stochastic programming. This allows us to find not only point estimates of the deterministic optimal solution, which occurs when reducing the problem of stochastic programming to the problem of nonlinear programming. ***Results.*** The application of the proposed method leads to the receipt of interval estimates of the controlled variables and the target function of the optimization problem, corresponding to the interval estimates of the regression of the explained parameters on the explanatory parameters. ***Scientific novelty.*** A method for solving the control problem of a complex system is proposed, which makes it possible to take into account the stochastic nature of the model and to find not only point, but also interval estimates of the optimal solution. ***Practical significance.*** Interval estimates of the decision of the statistical model, taking into account the random spread of statistical data, are necessary for making the right decision when choosing the parameters of the system being designed, which will allow to take into account possible undesirable random effects.

**Keywords:** *statistical model; multiple regression; stochastic programming; simulation model; interval estimates; optimal management*

**Постановка проблемы.** Моделирование дает возможность имитировать любые жизненные и производственные ситуации и получать такие решения, которые позволяют найти наилучший способ решения проблемы. Классическими объектами моделирования являются информационные, производственные, логистические системы, которые в большинстве случаев применяются для решения задач проектирования, реконструкции, долгосрочного планирования и в управлении. Важнейшим заданием моделирования является оценка параметров функционирования системы.

Управление сложными системами основано на изучении параметров и связей системы в их многомерной совокупности и начинается с анализа данных наблюдений. Методы многомерного статистического анализа позволяют обосновать выбор вероятностно-статистической модели, наилучшим образом соответствующей исходным статистическим данным, и оценить надежность и точность выводов как результата их анализа.

**Анализ публикаций.** При формировании модели изучаются взаимосвязи в многомерной статистике данных наблюдений для выявления зависимых переменных (результативных признаков) и групп влияющих на них показателей (факторных признаков). Выявление и описание связей между признаками, определяющими состояние системы, выполняется методами множественного корреляционного и регрессионного анализа [1; 2; 4].

Оптимальное управление – результат исследования полученной статистической модели. Математически задача управления формулируется так [3]. Максимизировать математическое ожидание функции цели

$$F_0(x) = Mf_0(x,\theta) \qquad (1)$$

при ограничениях

$$F_i(x) = Mf_i(x,\theta) \le 0, \ i = 1,2, \ldots, m \qquad (2)$$

$$x \in X \qquad (3)$$

Функции $F_i(x)$ (i = 0,1,…,m) являются функциями регрессии одного признака на другой или на несколько признаков. Решение $x$ детерминированное, $X$ – некоторое множество $n$-мерного пространства $R^n$, отвечающее обычно ограничениям специального вида, например:

$$X := \{(x_1,\ldots,x_n) : x_1 \ge 0,\ldots,x_n \ge 0\}$$

$\theta$ – элементарное событие некоторого вероятностного пространства. Это – задача перспективного стохастического программирования. Если найдены функции регрессии $F_i(x)$, задача решается как задача нелинейного программирования [3].

**Цель статьи** – найти метод решения задачи управления (1) – (3).

**Изложение основного материала**

При каждом $x$ значение функции цели $f_0(x,\theta)$ и функций ограничений $f_i(x,\theta)$, i = 1,…,m зависят от реализации $\theta$. Если в результате эксперимента состояние $\theta$ становится известным, выбор решения сводится к обычной задаче нелинейного программирования:

$$\text{максимизировать} \quad f_0(x,\theta) \qquad (4)$$

при ограничениях :

$$f_i(x,\theta) \le 0, i = 1,\ldots,m \qquad (5)$$

$$x \in X \qquad (6)$$

В современной теории оптимизации поиск решения ориентирован как на математические средства моделирования, так и на использование методов имитационного моделирования. Обычно предполагается, что модель задана легко обозримыми соотношениями, которые можно проанализировать и выбрать нужные направления поиска. В имитационных моделях такие зависимости скрыты от наблюдателя. И можно анализировать только отдельные случайные проявления последствий принятых решений. Другими словами, ситуация напоминает ситуацию, когда математическая статистика изучает закономерности по их отдельным случайным проявлениям.

Если произвольную имитацию изучаемого процесса обозначить через $\theta$ и предположить, что $\theta$ носит случайный характер, то имитационная модель позволяет наблюдать при каждом решении $x$ некоторые случайные показатели $f_i(x,\theta), i = 0,1,\ldots,m$, зависящие от $\theta$. В процессе имитации необходимо найти такое $x$, при котором выполняются все ограничения и достигается искомый максимум, т. е. решить задачу стохастического программирования.

Имитационное моделирование связано с разработкой сценариев поведения системы. Каждый сценарий может состоять из ряда аналитических моделей и зависимостей, связанных определенными логическими, вероятностными переходами. Задачу максимизации функции регрессии (1) можно интерпретировать следующим образом. Имеется ряд сценариев, в каждом из которых величина $f_0(x,k,\theta), k = 1,\ldots,K$ характеризует выгоду, связанную с планом $x$, а путем проигрывания сценариев требуется найти x, которое максимизирует выгоду. При этом одна итерация состоит из следующих операций. Имеется точка $x^s$. Проигрывая сценарии, наблюдаем $f_0(x^s,k,\theta^r)$ и определяем $k^s$ из условия $f_0(x^s,k^s,\theta^r) = \max f_0(x^s,k,\theta^r), k = 1,\ldots,K$ для каждого $\theta^r, r = 1,\ldots,R$ .

Таким образом получаем R решений, соответствующих каждому виду $\theta$. Если $x_j$, $j = 1,\ldots, n$ – управляемые переменные задачи оптимизации, то каждому $x_j$ будет соответствовать $R$ значений: $x_j^s(\theta^r), r = 1,\ldots,R$ . Наименьшее и наибольшее из них определят границы интервальной оценки решения задачи. Само решение не будет детерминированным, а найденный интервал будет покрывать искомое значение, доверительная вероятность которого определяется характером случайного воздействия $\theta$.

В качестве $\theta$ можно рассмотреть точечную и интервальные оценки регрессии результативного параметра $y$ на факторный параметр $x$. Оценка условного математического ожидания генеральной совокупности, полученная по уравнению регрессии, является точечной. Кроме точечной оценки для условного математического ожидания результативного признака можно построить доверительный интервал при заданном значении объясняющей переменной $X$:

$$\bar{y}_{x_i} - t_{\alpha,k} S_{yx}\sqrt{h_i} \le \mu_{y/x=x_i} \le \bar{y}_{x_i} + t_{\alpha,k} S_{yx}\sqrt{h_i} \qquad (7)$$

Здесь $\bar{y}_{x_i}$ – предсказанное значение объясняемой переменной $Y$ при $X = X_i$; $t_{\alpha,k}$ – критическое значение распределения Стьюдента при $k = n - 2$ степенях свободы и уровне значимости $\alpha$; $n$ – объем выборки; $S_{yx}$ – среднеквадратическая ошибка оценки; $\mu_{y/x=xi}$ – математическое ожидание переменной $Y$ при $X = X_i$;

$$h_i = \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{SSX}; \quad SSX = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Стандартное отклонение наблюдаемых значений переменной Y от ее регрессионной прямой (стандартная ошибка)

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum(Y_i - \bar{y}_{x_i})^2}{n-2}},$$

где $Y_i$ – фактическое значение переменной Y при заданном $X_i$ ; $\bar{y}_{x_i}$ – предсказанное значение переменной Y при заданном $X_i$; $SSE$ – сумма квадратов ошибок.

Анализ формулы (7) показывает, что ширина доверительного интервала зависит от нескольких факторов. С одной стороны, увеличение объема выборки приводит к сужению интервала. С другой стороны, возрастание амплитуды колебаний вокруг линии регрессии, характеризующееся $SSE$ ($S_{yx}$), приводит к увеличению интервала. Но самое главное – ширина интервала изменяется в зависимости от значения $X_i$: при прогнозировании отклика (значения $Y$) для значений $X$, близких к среднему, доверительный интервал уже, чем для значений $X$, далеких от среднего.

Если учесть интервальные оценки $b$ коэффициентов регрессии $\beta$

$$Y \approx g(x) = \beta_0 + \beta_1 X,$$

покрывающие их значения с надежностью $\gamma = 0{,}75$:

$$b - t(\alpha,k)s_b < \beta < b + t(\alpha,k)s_b, \qquad (8)$$

получим еще одну интервальную оценку регрессии при фиксированном значении $X$.

Оценки среднего квадратического отклонения коэффициентов уравнения регрессии вычисляют по формулам:

$$s_{\beta 0} = s_{ост} / \sqrt{n-2}\,; \; s_{\beta 1} = s_{ост} / (s_x\sqrt{n-2}),$$

где $s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 / n}$,

$$s^2_{ост} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - y(x_i)]^2 -$$

оценка остаточной дисперсии.

Интервальные оценки регрессии в соответствии с формулой (8) будут иметь вид:

$$(b_0 - t(\alpha,k)s_b) + (b_1 - t(\alpha,k)s_b)X_i \le \mu_{y/x=xi} \le$$
$$\le (b_0 + t(\alpha,k)s_b) + (b_1 + t(\alpha,k)s_b)X_i \qquad (9)$$

Или: $\bar{y}_{R_н} \le \mu_{y/x=xi} \le \bar{y}_{Rв}$

Таким образом, $\theta$ имеет 5 реализаций регрессии $y$ на $x$:

r=1 $\quad \bar{y}_{x_i} = b_0 + b_1 x_i \qquad (10)$

r=2 $\quad \bar{y}_{x_i} = b_0 + b_1 x - t_{\alpha,k} S_{yx}\sqrt{h_i} = \bar{y}_{R\,min} \qquad (11)$

r=3 $\quad \bar{y}_{x_i} = b_0 + b_1 x + t_{\alpha,k} S_{yx}\sqrt{h_i} = \bar{y}_{R\,max} \qquad (12)$

r=4 $\quad \bar{y}_{x_i} = \bar{y}_{R_н} \qquad (13)$

r=5 $\quad \bar{y}_{x_i} = \bar{y}_{Rв} \qquad (14)$

Найдем интервальные оценки решений статистической модели оптимального управления, составленной на основании статистического анализа 17 показателей 53 предприятий машиностроительной промышленности [6].

Рассмотрим фрагмент модели, описывающий связи как функции регрессии величин на независимый параметр $X_6$ (удельный вес покупных изделий).

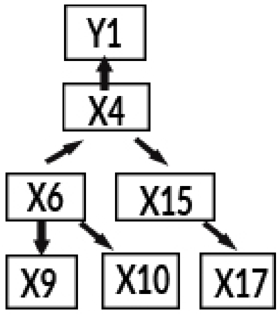


*Рис. 1. Модель функционирования системы*

Целевая функция:

$$Y_1 = 6{,}06905 - 6{,}52505 \cdot X_4 + 0{,}7426 \cdot 0{,}001 \cdot X_{11} + 4{,}7997 \cdot X_4^2 - 0{,}01278 \cdot 10^{(-6)} \cdot X_{11}^2 - 0{,}9799 \cdot 0{,}001 \cdot X_4 \cdot X_{11} \rightarrow \max.$$

Ограничения:

$$X_4 = 0{,}426224 - 0{,}34433 \cdot X_6$$

$$X_5 = -0{,}0104 \cdot X_{17} + 0{,}9373$$

$$X_9 = 9{,}422 \cdot X_6^3 - 9{,}9671 \cdot X_6^2 + 2{,}0722 \cdot X_6 + 0{,}5101$$

$$X_{10} = -1{,}9111 \cdot X_6^3 + 1{,}1342 \cdot X_6^2 + 1{,}4103 \cdot X_6 + 1{,}0872$$

$$X_{15} = -3929{,}3709 \cdot X_4^3 + 4929{,}2688 \cdot X_4^2 - 1735{,}6876 \cdot X_4 + 283{,}6687$$

$$X_{17} = -9{,}3771 \cdot 10^{-7} \cdot X_{15}^3 - 5{,}3303 \cdot 10^{-4} \cdot X_{15}^2 + 0{,}23452 \cdot X_{15} + 2{,}6197$$

$0.17 \le X_4 \le 0.51$; $0.62 \le X_5 \le 0.83$;
$0.02 \le X_6 \le 0.68$; $0.05 \le X_9 \le 1.31$;
$0.62 \le X_{10} \le 2.62$; $42.84 \le X_{15} \le 177.84$;
$8.62 \le X_{17} \le 30.53$;

Значение целевой функции, являющейся функцией регрессии производительности труда $Y_1$ на $X_4$ (трудоемкость единицы продукции) и $X_{11}$ (среднегодовую численность персонала), в основном, меняется за счет $X_4$, как показали исследования модели. Влияние $X_{11}$ достаточно устойчиво и не прекращается при достижении численности персонала $X_{11}$, определяемого допустимым объёмом среднегодового фонда заработной платы $X_{13}$.

Точечную и интервальную оценки регрессии $X_4$ на $X_6$ можно найти в каждой точке диапазона выборки статистических данных по формулам (10) – (14). Линии, соответствующие этим оценкам для всех значений $X_6$, входящих в выборку, ограничивают области, определяемые стандартной ошибкой точечной оценки регрессии и 95% доверительным интервалом, покрывающим функцию регрессии и наблюденные значения. Первой области соответствуют реализации $\theta$ при $r = 2$ ($R_{min}$) и $r = 3$ ($R_{max}$), второй области – при $r = 4$ ($R_н$) и $r = 5$ ($R_в$). Прямая регрессии – реализация $\theta$ при $r = 1$.

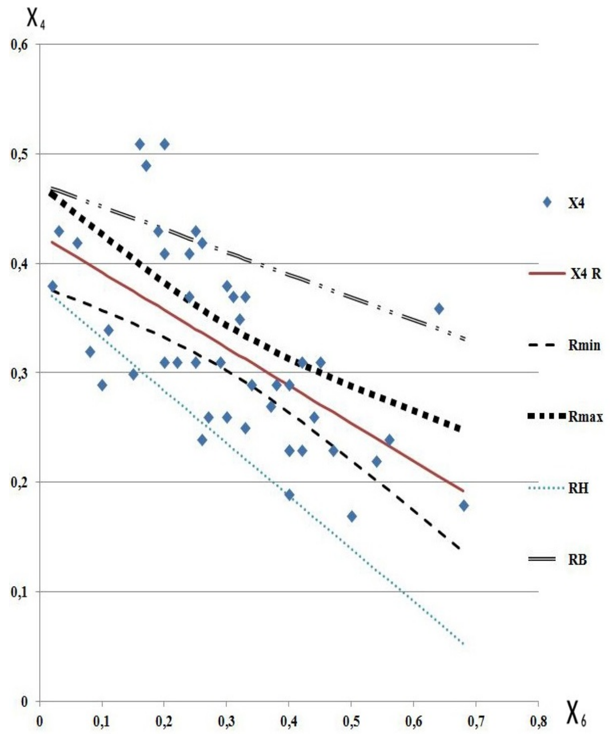


*Рис. 2. Точечная и интервальная оценки регрессии $X_4$ на $X_6$:*

Сценарии составлены по значениям $X_6$ max, определяемым ограничениями задачи:
$X_6$ max = 0.02; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.68.

При расчетах учитывалось случайное воздействие, т. е. вид оценки регрессии (10) – (14). Для каждого из них прогонялись все сценарии по значению $X_6$ max и находились оптимальные решения.

Расчеты могут быть выполнены в Excel с помощью надстройки Поиск решения.

Полученные результаты дают возможность установить границы интервалов, покрывающих искомые значения управляемых переменных и целевой функции задачи, при каждом значении $\boldsymbol{X_6}$ max и в зависимости от вида интервальной оценки регрессии $X_4$ на $X_6$.

*Таблица*

***Интервальные оценки оптимального решения***

| $X_6$ max =0,3 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Rточ | Rстанд | | R95% | |
| $X_4$ | 0,322925 | 0,302156 | 0,34369 | 0,2355 | 0,41035 |
| $X_5$ | 0,726482 | 0,7219 | 0,73 | 0,7081 | 0,73456 |
| $X_{15}$ | 104,8779 | 100,857 | 109,867 | 96,97174 | 129,944 |
| $X_{17}$ | 20,27093 | 19,8886 | 20,7081 | 19,4941 | 22,0362 |
| $Y_1$ | 7,658908 | 7,143158 | 8,178878 | 5,893421 | 9,879799 |

В таблице приведена точечная оценка $R_{точ}$, интервальные оценки по стандартной ошибке $R_{станд}$ и оценки для 95 % интервала $R$ 95 %.

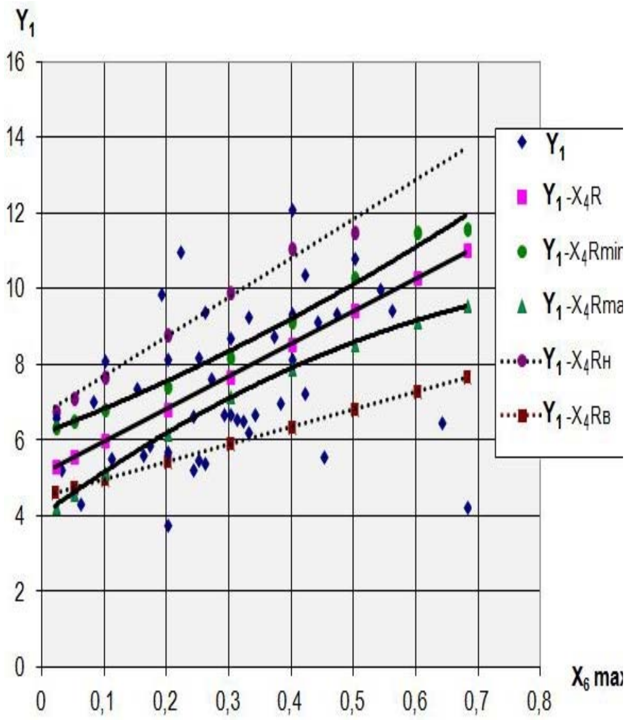


*Рис. 3. Проверка адекватности модели*

Существенное влияние реализации θ прослеживаем на управляемых переменных $X_4$, $X_5$, $X_{15}$, $X_{17}$, где:

$X_4$ – трудоемкость единицы продукции;

$X_5$ – удельный вес работников в составе промышленно-производственного персонала (ППП);

$X_{15}$ – оборачиваемость нормированных оборотных средств, дни;

$X_{17}$ – непроизводственные затраты, %.

Данные в таблице приведены для значения $X_6$ = 0,3, близкого к выборочному среднему. Как уже отмечалось, интервалы, покрывающие искомые оптимальные значения, к концам диапазона выборки будут увеличиваться В этом легко убедиться, если построить диаграммы, подобные диаграмме для $X_4$ с рисунка 1, для других управляемых переменных.

Диаграмма функции регрессии целевой функции $Y_1$ на $X_6$ и ее интервальные оценки, вызванные случайными воздействиями (10) – (14), приведены на рисунке 2. Там же нанесено корреляционное поле. Анализ всех данных, исходных и расчетных, позволяет сделать вывод об адекватности модели. Диаграмма также дает возможность найти интервальные оценки оптимума при любом значении $X_6$.

**Выводы.** Найдены интервальные оценки оптимального решения статистической модели управления, соответствующие интервальным оценкам регрессии. Проверена адекватность модели статистическим данным. Рекомендация: учитывать интервальные оценки оптимальных решений (диапазон значений, а не только точечную оценку). Если учесть, что точечная оценка не отражает всей реальной ситуации, о чем свидетельствует диапазон исходных данных, а они далеки от прямой линии регрессии, это свидетельствует о необходимости принятия во внимание влияния случайных факторов.

Предложен метод решения задачи управления сложной системой, позволяющий учесть стохастический характер модели и найти не только точечные, но и интервальные оценки оптимального решения.

Интервальные оценки решения статистической модели, учитывающие случайный разброс статистических данных, необходимы для принятия правильного решения при выборе параметров проектируемой системы, что позволит учесть и избежать возможных нежелательных случайных воздействий.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Цыбрий Л. В. Введение в статистический анализ : учеб. пособие / Л. В. Цыбрий. – Днепропетровск : ПГАСА, 2016. – 188 с.
2. Муляр С. С. Розробка алгоритму побудови статистичної моделі оптимального управління / С. С. Муляр, Л. В. Цибрій // Строительство, материаловедение, машиностроение : сб. науч. тр. – 2016. – Вып. 94. – С. 119–124. – (Компьютерные системы и информационные технологии в образовании, науке и управлении).
3. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования / Ю. М. Ермольев. – Москва : Наука, 1976. – 240 с. – (Оптимизация и исследование операций).
4. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel ; пер. с англ. / Дэвид М. Левин, Дэвид Стефан, Тимоти С. Кребиль, Марк Л. Беренсон. – 4-е изд., Москва : Вильямс, 2004. – 1312 с.
5. Томашевський В. М. Моделювання систем : підруч. для студ. вузів / В. М. Томашевський. – Київ : BHV, 2005. – 352 с.
6. Дубров А. М. Многомерные статистические методы : для экон. и менеджеров : учеб. для экон. спец. вузов / А. М. Дубров, В. С. Мхитарян, Л. И. Трошин. – Москва : Финансы и статистика, 2000. – 350 с.


## REFERENCES


1. Tsibrij L.V. *Vvedenie v statisticheskij analiz* [Introduction to statistical analysis]. Dnepropetrovsk: PGASA, 2016, 188 p. (in Russian).
2. Muliar S.S, Tsybrii L.V. *Rozrobka alghorytmu pobudovy statystychnoi modeli optymalnoho upravlinnia* [Development of optimal-management statistical model]. *Stroitel'stvo, materialovedenie, mashinostroenie* [Construction, Materials Science, Mechanical Engineering]. *Komp'yuternye sistemy i informacionnye texnologii v obrazovanii, nauke i upravlenii* [Computer systems and information technologies in education, science and management]. Dnepropetrovsk: PGASA, 2016, iss. 94, pp. 119-124. (in Ukrainian).
3. Ermol'ev Yu.M. *Metody stoxasticheskogo programirovanya* [Methods of stochastic programming]. *Optimizaciya i issledovanie operacij* [Optimization and operations research]. Moskva: Nauka, 1976, 240 p. (in Russian).
4. Levin D.M., Stefan D., Krebill T.S. and Berenson M.L. *Statistika dlya menedzherov s ispolzovaniem Microsoft Excel* [Statistics for managers using Microsoft Excel]. Ed. 4, Moskva: Vil'yams, 2004, 1312 p. (in Russian).
5. Tomashevskyi V.M. *Modeliuvannia system* [Systems' modeling]. Kyiv: BHV, 2005, 352 p. (in Russian).
6. Dubrov A.M. Mkhitaryan V.S. and Troshin L.I. *Mnogomernye statisticheskie metody* [Multidimensional statistical methods]. Moskva: Finansy i statistika, 2000, 350 p. (in Russian).


*Рецензент: Єршова Н. М. д-р техн. наук, проф.*

Надійшла до редколегії: 10.10.2017 р. Прийнята до друку: 27.11.2017 р.