

УДК 669.017:519.21

DOI: 10.30838/UJCEA.2312.051125.115.1198

ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТРУКТУРИ ТА ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕТАЛІВ

СОЛОВЕЙ Д. В.^{1*}, асп.,

ШЕВЧЕНКО Д. П.², асп.,

ВЕРБА А. П.³, асп.,

СОКОЛЕНКО О. В.⁴, асп.,

ЗАГРУННИЙ В. С.⁵, асп.,

ІЛЬЄВ І. М.⁶, канд. техн. наук, доц.

^{1*} Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Український державний університет науки і технологій, ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (097) 334-75-88, e-mail: solovei.denis@365.pdaba.edu.ua, ORCID ID: 0009-0003-7384-1222

² Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Український державний університет науки і технологій, ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (097) 334-75-88, e-mail: shvchenkod40@gmail.com, ORCID ID: 0009-0000-9325-8059

³ Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Український державний університет науки і технологій, ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (097) 334-75-88, e-mail: anverba@icloud.com, ORCID ID: 0009-0000-6689-6733

⁴ Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Український державний університет науки і технологій, ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (097) 334-75-88, e-mail: aleksey.stroycom@gmail.com, ORCID ID: 0009-0003-6609-9875

⁵ Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Український державний університет науки і технологій, ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (097) 334-75-88, e-mail: volchuk.volodymyr@pdaba.edu.ua, ORCID ID: 0009-0007-3634-6942

⁶ Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій, Український державний університет науки і технологій, ННІ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, 49005, Дніпро, Україна, тел. + 38 (096) 76-96-99, e-mail: ilyev.ilya@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-9515-7734

Анотація. Вступ. Дослідження впливу структури матеріалів на їх властивості являється важливою задачею матеріалознавства. Однак ця задача ускладнюється у зв'язку зі складною конфігурацією структурних елементів. Особливо це стосується ідентифікації структури маловуглецевих сталей, де продукти розпаду аустеніту – перліт, ферит, бейніт, мартенсит, гольчатий та відманштетовий ферит та інші відзначаються складністю будови і тому доволі часто описуються баловими оцінками. Для аналізу структури та властивостей маловуглецевої сталі 20 в роботі запропоновано застосувати фрактальний підхід. **Матеріали та методика.** Проведено дослідження мікроструктури маловуглецевої сталі 20 шляхом обчислення фрактальної розмірності її складових та розглянуто можливості застосування фрактальної розмірності для оцінки критеріїв якості сталі. **Результати експерименту.** У ході проведених досліджень було зафіксовано, що зі збільшенням фрактальної розмірності перліту з 1,64 до 1,82 у ферито-перлітній структурі сталі 20 в стані заводської поставки показники твердості та міцності та твердості також збільшуються. При збільшенні фрактальної розмірності фериту зі 1,75 до 1,93 збільшуються пластичні показники (відносне звуження та видовження). Побудовані математичні моделі залежності механічних властивостей сталі 20 від фрактальної розмірності ферито-перлітної структури. **Висновки.** Результати досліджень підтверджують, що фрактальна розмірність складових структури впливає на ряд механічних властивостей маловуглецевої сталі 20. В результаті проведених експериментів було встановлено, що зв'язок між фрактальною розмірністю перліту та механічними властивостями сталі коливається в межах коефіцієнта парної кореляції рівнянь регресії $R^2 = 0,65\text{--}0,88$. Зв'язок між фрактальною розмірністю фериту та механічними властивостями коливається в межах коефіцієнта парної кореляції рівнянь регресії $R^2 = 0,72\text{--}0,85$. Дані результати є важливим кроком в розробці неруйнівних методів контролю маловуглецевих сталей з ферито-перлітною будовою та дають змогу досліджувати нові зв'язки між структурою та властивостями металів.

Ключові слова: сталь 20; структура; механічні властивості; ферит; перліт; модель

FRACTAL ANALYSIS OF THE STRUCTURE AND PROPERTIES OF METALS

SOLOVEI D.V.^{1*}, *Postgrad. Stud.*,
SHEVCHENKO D.P.², *Postgrad. Stud.*,
VERBA A.P.³, *Postgrad. Stud.*,
SOKOLENKO O.V.⁴, *Postgrad. Stud.*,
ZAHRUNNYI V.S.⁵, *Postgrad. Stud.*,
ILIEV I.M.⁶, *Cand. Sc. (Tech.), Assoc. Prof.*

^{1*} Department of Materials Science, Ukrainian State University of Science and Technologies, ESI “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Architect Oleh Petrov St., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (097) 334-75-88, e-mail: solovei.denis@365.pdaba.edu.ua, ORCID ID: 0009-0003-7384-1222

² Department of Materials Science, Ukrainian State University of Science and Technologies, ESI “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Architect Oleh Petrov St., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (097) 334-75-88, e-mail: shevchenkod40@gmail.com, ORCID ID: 0009-0000-9325-8059

³ Department of Materials Science, Ukrainian State University of Science and Technologies, ESI “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Architect Oleh Petrov St., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (097) 334-75-88, e-mail: anverba@icloud.com, ORCID ID: 0009-0000-6689-6733

⁴ Department of Materials Science, Ukrainian State University of Science and Technologies, ESI “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Architect Oleh Petrov St., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (097) 334-75-88, e-mail: aleksey.stroycom@gmail.com, ORCID ID: 0009-0003-6609-9875

⁵ Department of Materials Science, Ukrainian State University of Science and Technologies, ESI “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Architect Oleh Petrov St., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (097) 334-75-88, e-mail: volchuk.volodymur@pdaba.edu.ua, ORCID ID: 0009-0007-3634-6942

⁶ Department of Computer Sciences, Information Technologies and Applied Mathematics, Ukrainian State University of Science and Technologies, ESI “Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture”, 24-a, Architect Oleh Petrov St., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (096) 76-96-99, e-mail: ilyev.ilya@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-9515-7734

Abstract. Introduction. The study of the influence of the structure of materials on their properties is an important task of materials science. However, this task is complicated by the complex configuration of structural elements. This is especially true for identifying the structure of low-carbon steels, where the decomposition products of austenite – pearlite, ferrite, bainite, martensite, needle and Widmannstedt ferrite and others – are characterized by the complexity of the structure and therefore are quite often described by point estimates. To analyze the structure and properties of low-carbon steel 20, the work proposes to apply a fractal approach. **Materials and methods.** The microstructure of low-carbon steel 20 was studied by calculating the fractal dimension of its components and the possibilities of using fractal dimension to assess steel quality criteria were considered. **The results of the experiment.** In the course of the conducted research, it was recorded that with an increase in the fractal dimension of pearlite from 1.64 to 1.82 in the ferrite-pearlite structure of steel 20 in the factory delivery state, the hardness and strength and hardness indicators also increase. With an increase in the fractal dimension of ferrite from 1.75 to 1.93, the plastic indicators (relative narrowing and elongation) increase. Mathematical models of the dependence of the mechanical properties of steel 20 on the fractal dimension of the ferrite-pearlite structure have been constructed. **Conclusions.** In the course of the conducted research, it was recorded that with an increase in the fractal dimension of pearlite from 1.64 to 1.82 in the ferrite-pearlite structure of steel 20 in the factory delivery state, the hardness and strength and hardness indicators also increase. With an increase in the fractal dimension of ferrite from 1.75 to 1.93, the plastic indicators (relative narrowing and elongation) increase. Mathematical models of the dependence of the mechanical properties of steel 20 on the fractal dimension of the ferrite-pearlite structure have been constructed.

Keywords: steel 20; structure; mechanical properties; ferrite; pearlite; model

Вступ. Сучасні наукові дослідження в галузі матеріалознавства демонструють зростаючий інтерес до використання математичних методів для глибшого розуміння структури та властивостей матеріалів [1–3]. Однією з таких перспективних концепцій є теорія фракталів, яка дозволяє описати складні

багаторівневі структури, характерні для багатьох технічних і природних матеріалів [4–6]. Фрактальний підхід забезпечує нові можливості для кількісних характеристик мікроструктури матеріалів, шляхом зокрема визначення фрактальної розмірності фазових або структурних складових.

Фрактальна розмірність виступає як чутливий параметр, що здатен відображати ступінь неоднорідності, пористості чи зернистості матеріалу, що впливає на його механічні властивості – міцність, твердість, в'язкість тощо [7–9]. Таким чином, встановлена кореляція між фрактальними характеристиками мікроструктури та механічними властивостями відкриває шлях до створення нових, ефективних методів неруйнівного контролю матеріалів. Це має особливе значення для високотехнологічних галузей, де критично є забезпечення надійності без пошкодження об'єктів контролю [10–12].

У даній роботі розглядається потенціал застосування фрактальної геометрії для моделювання структури матеріалів та прогнозування їх механічних властивостей, що може стати основою для розробки інноваційних неруйнівних методів оцінки якості матеріалів.

Матеріали та методика. У якості об'єкта дослідження використовувався зразки сталі марки 20 у формі пластинок 30×20×50 мм, виготовлених з низьколегованої маловуглецевої. Сталь класу Ат400С, відповідно до вимог стандарту України 380-2005, характеризувалася певним хімічним складом, наведеним у таблиці 1.

Таблиця 1

Хімічний склад сталі 20 в %

C	Si	Mn	Ni	S	P	Cr	Cu	As	Fe
0,14 – 0,22	0,05 – 0,15	0,40 – 0,65	до 0,30	до 0,05	до 0,04	до 0,30	до 0,30	до 0,08	Залишок

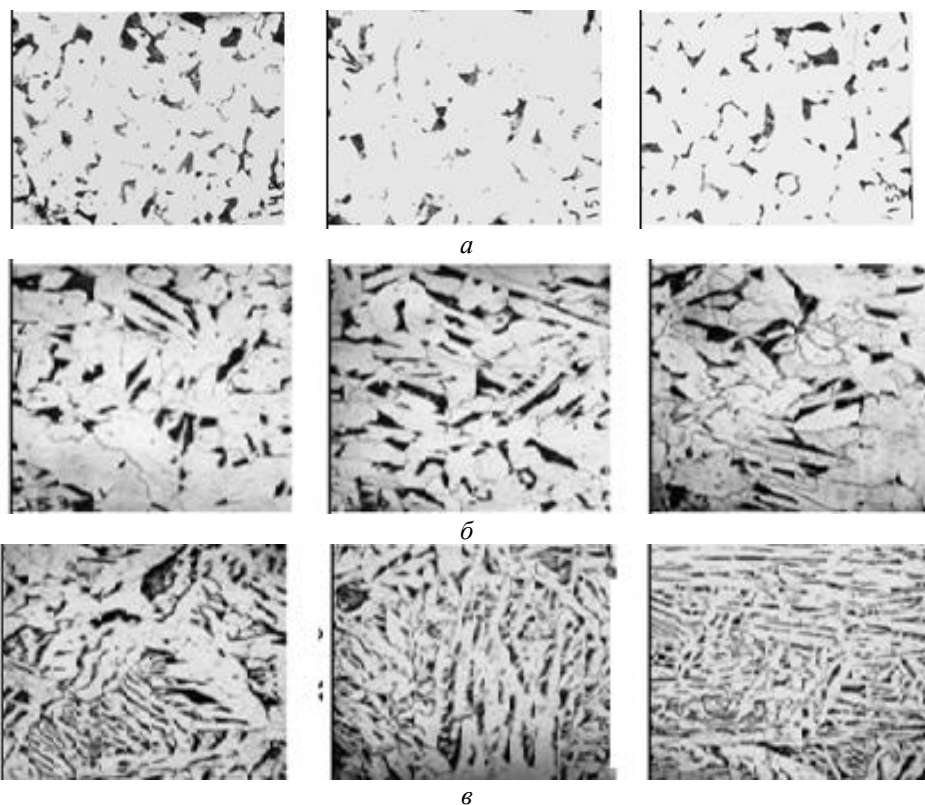


Рис. 1. Мікроструктура сталі 20 : а – в стані заводської поставки; б – нагрів до температури 930 °С з витримкою 30 хвилин і подальшим охолодженням у воді до 650 °С, в – нагрів до температури 930 °С, витримка протягом 30 хвилин з охолодженням в оливі

Для дослідження було відібрано зразки зі сталі 20 як у первісному стані поставки, так і після проведення термічної обробки відповідно до наступних технологічних режимів:

- термічна обробка, що передбачала нагрів до температури 930 °С з витримкою 30 хвилин і подальшим охолодженням у воді до 650 °С (що відповідає температурному діапазону перлітної області; реалізується дифузійний механізм перетворень);

- інший режим передбачав нагрів до тієї ж температури (930 °С), витримку протягом 30 хвилин, після чого охолодження відбувалося у оливi.

Дослідження мікроструктури сталі проводилися із застосуванням методів кількісного металографічного аналізу за допомогою мікроскопа «Неофот-2» (виробництва Німеччини).

Встановлено, що вміст перліту коливався в межах 7–20 %, решта об'єму займав ферит. У деяких зразках виявлено поодинокі зерна верхнього бейніту в кількості до 2–5 % (характерно для зразків у стані поставки або після часткового охолодження до 650 °С у воді). У разі охолодження в маслі формується структура типу ферито-бейніта.

Натурні випробування проводилися з метою визначення механічних характеристик матеріалу: межі міцності на розрив (σ_B), межі плинності (σ_T), твердості за Брінелем (HRB) та мікротвердості за Віккерсом (прилад ПМТ-3, навантаження 10 г) – окремо для феритної фази (HV10) та перлітної (HV10). Також оцінювалася ударна в'язкість KCU при температурі +20 °С. Усі випробування здійснювалися відповідно до чинних стандартів і методичних вказівок.

Результати експерименту. Фрактальна розмірність ферито-перлітної сталі 20 визначалася за класичною формулою **Хаусдорфа (або Хаусдорфа-Безіковича) для визначення фрактальної розмірності** використовується для оцінки того, наскільки складна або «дрібнодеталізована» геометрична структура при масштабуванні [13; 14]. Вона ґрунтується на покритті множини фігурами меншого масштабу.

Фрактальна (Хаусдорфова) розмірність множини D визначається як:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}, \quad (1)$$

де $N(\epsilon)$ – мінімальна кількість ϵ розмірних елементів (наприклад, куль або квадратів), необхідних для покриття множини; $\log$ – логарифм, зазвичай натуральний або десятковий.

Формула Хаусдорфа для визначення фрактальної розмірності є одним із ключових інструментів у фрактальній геометрії, оскільки вона дозволяє кількісно описати складність геометричних об'єктів, що мають нерегулярну, самоподібну структуру.

У традиційній евклідовій геометрії розмірність фігур – це ціле число (наприклад, пряма – 1D, площа – 2D), однак у реальному світі більшість об'єктів не мають чіткої форми. Наприклад, хмари, гірські ландшафти, дерева, контури річок або зерна в металах – усі ці структури складні й не можуть бути адекватно описані звичайними геометричними мірками. Саме тут набуває вагу фрактальна розмірність, яка часто є дробовим числом і відображає рівень детальності об'єкта на різних масштабах.

Фрактальна розмірність допомагає описати, як змінюється структура об'єкта при масштабуванні, що важливо для моделювання гірських рельєфів, шорстких поверхонь, берегових ліній, хмар тощо.

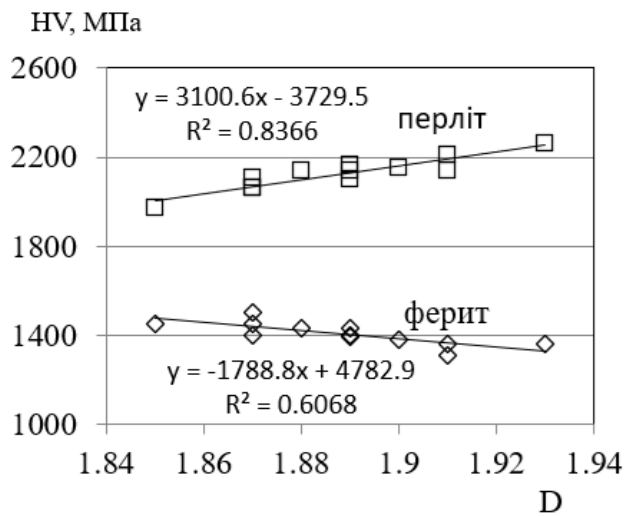
У матеріалознавстві фрактальний підхід застосовується для дослідження мікротріщин, розподілу зерен, пористості та інших морфологічних характеристик [15–17].

Хаусдорфова розмірність дозволяє кількісно оцінити ступінь неоднорідності та складності мікроструктури, що впливає на механічні властивості матеріалу [18–20].

Завдяки своїй здатності адекватно описувати структури, які виходять за межі класичної геометрії, формула Хаусдорфа є незамінною для аналізу й моделювання складних систем у природничих та інженерних науках [21; 22]. Вона надає універсальну мову для вивчення явищ, що

демонструють самоподібність і складність на різних масштабах.

На рисунку 2 наведені графіки залежності механічних властивостей сталі 20



від фрактальної розмірності фериту та перліту.

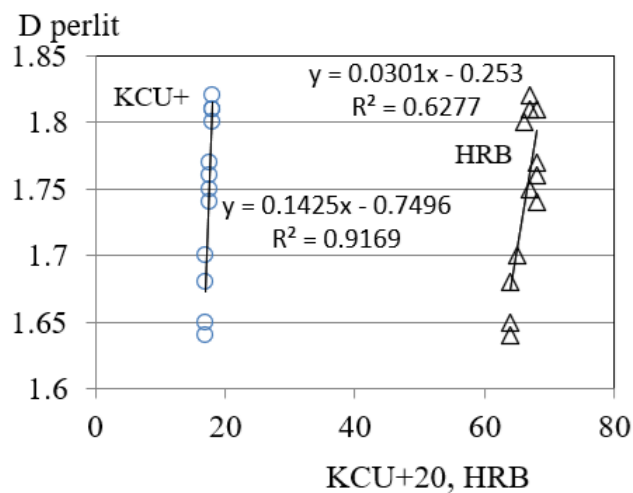
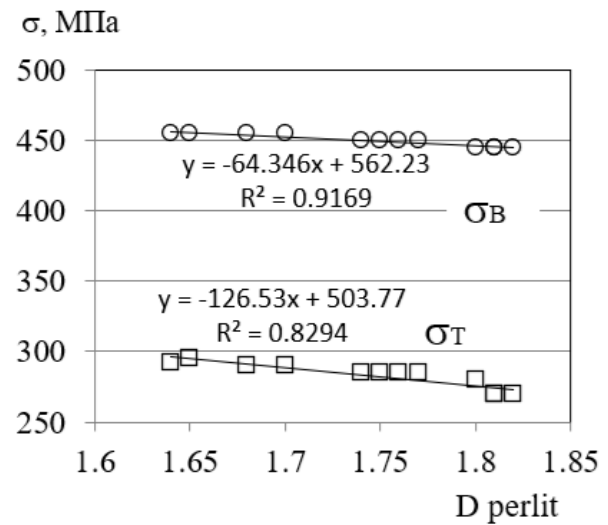


Рис. 2. Вплив фрактальної розмірності фериту і перліту на механічні властивості сталі 20

Отримані в ході дослідження результати мають вагоме прикладне значення, зокрема у сфері контролю якості металопрокатної продукції зі сталі марки 20. Застосування встановлених кореляційних залежностей дозволяє здійснювати непрямий контроль властивостей металу, що особливо важливо в умовах серійного або масового виробництва, де забезпечення швидкості та точності оцінки якості продукції є критичним.

Побудовані математичні моделі фрактального типу дають змогу прогнозувати механічні характеристики

сталі 20 (зокрема, міцність, твердість, ударну в'язкість тощо) без необхідності проведення повноцінних механічних випробувань.

Таким чином, використання фрактального аналізу у поєднанні з математичним моделюванням відкриває нові можливості для оптимізації систем технічного контролю якості, а також забезпечує більш гнучкий і технологічно адаптивний підхід до оцінювання властивостей конструкційних матеріалів.

Висновки

Проведено аналіз впливу ферито-перлітної структури маловуглецевої сталі 20 на механічні властивості шляхом застосування фрактального апарату. Такий підхід дозволив розробити неруйнівний метод контролю якості маловуглецевих сталей.

У ході дослідження було здійснено комплексний аналіз впливу ферито-перлітної мікроструктури маловуглецевої сталі марки 20 на її механічні властивості з використанням фрактального підходу до обробки металографічних даних. Застосування фрактального апарату дало змогу виявити

стійкі кореляційні зв'язки між структурними особливостями сталі та її механічними характеристиками.

На основі проведеного аналізу було запропоновано концепцію неруйнівного методу контролю якості маловуглецевих сталей, який ґрунтується на фрактальних параметрах мікроструктури. Такий підхід дозволяє здійснювати попередню оцінку експлуатаційних властивостей матеріалу без потреби в проведенні повномасштабних механічних випробувань, що забезпечує істотну економію часу та ресурсів на виробництві.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Hlushkova D. B., Bagrov V. A., Demchenko S. V., Volchuk V. M., Kalinin O. V., Kalinina N. E. Structure and properties of powder gas-plasma coatings based on nickel. *БАИТ*. 2022. № 4 (140). Pp. 125–130.
2. Uzlov O., Bolshakov V. Investigation of acicular ferrite structure in HSLA steel. *Proceedings of the "Materials Week 2002"*. Frankfurt : Werkstoff-Informationsgesellschaft, 2002. Pp. 14–20. URL: www.irbis-nbuv.gov.ua/cgiirbis_64.exe?
3. Дубров Ю. И., Волчук В. Н., Большаков В. И. Применение экспертной информации при формировании активного эксперимента в материаловедении. *Моделирование и оптимизация в материаловедении : матер. к 40-й междунар. сем. по моделированию и оптимизации композитов*. Одесса : АстроПринт, 2001. С. 25–26.
4. Дубров Ю., Большаков В., Волчук В. Пути идентификации периодических многокритериальных технологий : монография. Саарбрюккен : Palmarium Academic Publishing, 2015. 236 с. URL: <https://www.palmarium-publishing.ru/extern/listprojects>
5. Большаков В. И., Волчук В. Н., Дубров Ю. И. О применении фрактального формализма при математическом описании структур. *Металознавство та термічна обробка металів*. 2016. № 2. С. 26–33. URL: <http://mtom.pgasa.dp.ua/article/view/27-33>
6. Большаков В. И., Волчук В. Н., Дубров Ю. И. К вопросу о постановке задачи идентификации фрактальной структуры металла. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2016. № 5. С. 35–39. URL: <http://visnyk.pgasa.dp.ua/article/view/68905/63995>
7. Большаков В., Волчук В., Дубров Ю. Пути применения теории фракталов : монография. Саарбрюккен : Palmarium Academic Publishing, 2016. 146 с.
8. Volchuk V., Dubrov Yu. Ways of compensation of incomplete formal axiomatics in identification of complex objects. *Металознавство та термічна обробка металів*. 2018. № 4. С. 31–35. URL: <https://doi.org/10.30838/J.PMHTM.2413.261218.31.562>
9. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1931. Vol. 38, № 1. Pp. 173–198.
10. Большаков Вад. И., Большаков В. И., Волчук В. М., Дубров Ю. И. Часткова компенсація неповноти формальної аксіоматики при ідентифікації структури металу. *Вісник НАН України*. 2014. № 12. С. 45–48. URL: <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/73434>
11. Большаков В. И., Волчук В. Н., Дубров Ю. И. Материаловедческие аспекты применения частичной компенсации неполноты формальной аксиоматики. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2015. № 5. С. 10–16. URL : <http://visnyk.pgasa.dp.ua/article/view/47385/43497>
12. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature : monograph. Nev-Yuork, San Francisco : Freeman, 1982. 480 p. URL: <http://www.amazon.com/Fractal-Geometry-Nature-Benoit-Mandelbrot/dp/0716711869>
13. Zhuravel' I. M., Svir'ska L. M. Measurement of the mean grain size in a metal by using fractal dimensions. *Materials Science*. 2010. Vol. 46, № 3. Pp. 418–420.
14. Zhuravel' I. M. Computer Analysis of the Distribution of Grain Sizes in the Structure of 12Kh1MF Steel After Operation. *Materials Science*. 2019. Vol. 55. № 2. Pp. 187–192.
15. Bol'shakov V., Volchuk V., Dubrov Yu. Fractals and properties of materials : monograph. Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2016. 140 p. URL: <https://www.lap-publishing.com/catalog/details/store/tr/book/978-3-330-01812-9/fractals-and-properties-of-materials?search=Fractals>

16. Bolshakov V. I., Volchuk V. M., Dubrov Yu. I. Regularization of One Conditionally III-Posed Problem of Extractive Metallurgy. *Metallofizika i Noveishie Tekhnologii*. 2018. Vol. 40, № 9. Pp. 1165–1171. DOI: 10.15407/mfint.40.09.1165.
17. Большаков В. И., Волчук В. Н., Дубров Ю. И. Топологические и фрактальные инварианты структуры для оценки качества металла. *Доповіді НАН України*. 2017. № 4. С. 42–48. URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi.2017.04.00>
18. Волчук В. Н. Разработка и исследование метода определения качественных характеристик металла на основе анализа фрактальной размерности его микроструктуры : дисс. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : 05.02.01. Днепропетровск, 2003. 186 с.
19. Большаков В. И., Волчук В. Н., Дубров Ю. И. Применение фрактального моделирования при оценке структуры и свойств металлов. *Металознавство та термічна обробка металів*. 2018. № 1. С. 50–55. URL: <https://doi.org/10.30838/J.PMHTM.2413.240418.50.105>
20. Volchuk V., Klymenko I., Kroviakov S., Orešković M. Method of material quality estimation with usage of multifractal formalism. *Tehnički glasnik – Technical Journal*. 2018. Vol. 12, № 2. Pp. 93–97. URL: <https://hrcak.srce.hr/202359>
21. Волчук В. Н. К вопросу о применении теории мультифракталов для оценки механических свойств металла. *Металознавство та термічна обробка металів*. 2014. № 3. С. 12–19. URL: <http://mtom.pgasa.dp.ua/article/view/12-19>
22. Волчук В. М. Модель оцінювання твердості чавунних валків СІХН-43 та СІХНФ-47. *Металознавство та термічна обробка металів*. 2019. № 4. С. 22–35. URL: <https://doi.org/10.30838/J.PMHTM.2413.241219.22.597>

REFERENCES

1. Hlushkova D.B., Bagrov V.A., Demchenko S.V., Volchuk V.M., Kalinin O.V. and Kalinina N.E. Structure and properties of powder gas-plasma coatings based on nickel. *VANT*. 2022, no. 4 (140), pp. 125–130.
2. Uzlov O. and Bolchakov V. Investigation of Acicular Ferrite Structure in HSLA Steel. Proceedings of the “Materials Week 2002”. Frankfurt : Werkstoff-Informationsgesellschaft, 2002, pp. 14–20.
3. Dubrov Yu.I., Volchuk V.N. and Bol'shakov V.I. *Primeneniye ekspertnoy informatsii pri formirovani aktivnogo eksperimenta v materialovedenii* [Application of expert information in the formation of an active experiment in materials science]. *Modelirovanie i optimizatsiya v materialovedenii : mater. k 40-j mezhdunar. sem. po modelirovaniyu i optimizatsii kompozitov* [The modeling and optimization in materials science : proc. of 40th Int. Conf.]. Odessa, 2001, pp. 25–26. (in Russian).
4. Dubrov Yu., Bolshakov V. and Volchuk V. *Puti identifikatsii periodicheskikh mnogokriterial'nykh tekhnologiy* [Road periodic identification of multi-criteria Technology]. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2015, 236 p.
5. Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *O primenenii fraktal'nogo formalizma pri matematicheskom opisani struktur* [The fractal application formalism in mathematical description of the structure]. *Metall Science and Heat Treatment of Metals*. 2016, no. 2, pp. 26–33. (in Russian).
6. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *K voprosu o postanovke zadachi identifikatsii fraktal'noy struktury metalla* [Statement on the issue of the problem identification of fractal metal structures]. *Visnyk Prydniprovs'koy derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture]. 2016, no. 5, pp. 35–39. (in Russian).
7. Bol'shakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Puti primeneniya teorii fraktalov* [Ways of applying the theory of fractals]. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2016, 146 p. (in Russian).
8. Volchuk V. and Dubrov Y. Ways of compensation of incomplete formal axiomatics in identification of complex objects. *Metall Science and Heat Treatment of Metals*. 2018, no. 4, pp. 31–35.
9. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 1931, vol. 38, no. 1, pp. 173–198. (in German).
10. Bol'shakov V.I., Bolshakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Chastkova kompensatsiya nepovnoty formal'noyi aksiomatyky pry identyfikatsiyi struktury metalu* [The partial compensation of incompleteness of formal axiomatics in the identification of the metal structure]. *Visnyk akademiyi nauk Ukrainy* [Bulletin of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2014, no. 12, pp. 45–48. (in Ukrainian).
11. Bol'shakov V.I., Volchuk V.N. and Dubrov Yu.I. *Materialovedcheskiye aspekty primeneniya chastichnoy kompensatsii nepolnoty formal'noyi aksiomatiki* [Material aspects of use of partial compensation of incompleteness of formal axiomatics]. *Visnyk Prydniprovs'koy derzhavnoyi akademiyi budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture]. 2015, no. 5, pp. 10–16. (in Russian).
12. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New-York, San Francisco Freeman, 1982, 480 p.
13. Zhuravel' I.M. and Svirs'ka L.M. Measurement of the mean grain size in a metal by using fractal dimensions. *Materials Science*. 2015, vol. 46, no. 3, pp. 418–420.

14. Zhuravel' I.M. Computer Analysis of the Distribution of Grain Sizes in the Structure of 12Kh1MF Steel After Operation. *Materials Science*. 2019, vol. 55, no. 2, pp. 187–192.
15. Bolshakov V., Volchuk V. and Dubrov Yu. *Fractals and properties of materials*. Saarbrucken : Lambert Academic Publishing, 2016, 140 p.
16. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. Regularization of One Conditionally ill-Posed Problem of Extractive Metallurgy. *Metallofizika i Noveishie Tekhnologii*. 2018, vol. 40, no 9, pp. 1165–1171.
17. Bolshakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Topologicheskkiye i fraktal'nyye invarianty struktury dlya otsenki kachestva metalla* [Topological and fractal invariants of a structure to assess the quality of a metal]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 4, pp. 42–48. (in Russian).
18. Volchuk V.M. *Rozroblennia i doslidzhennia metodu vyznachennia yakisnykh kharakterystyk metalu na osnovi analizu fraktalnoi rozmirnosti yoho mikrostruktury : diss. na soisk. uchen. step. kand. tehn. nauk : 05.02.01* [Development and research of the method for determining the qualitative characteristics of a metal on the basis of an analysis of the fractal dimension of its microstructure : Candidate Dissertation for Technical Sciences (05.02.01 – Materials Science)]. Dnipropetrovsk, 2003, 186 p. (in Ukrainian).
19. Bol'shakov V.I., Volchuk V.M. and Dubrov Yu.I. *Primeneniye fraktal'nogo modelirovaniya pri otsenke struktury i svoystv metallov* [Application of fractal modelling at the estimation of the structure and properties of metals]. *Metaloznavstvo ta termichna obrobka metaliv* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2018, no. 1, pp. 50–55. (in Russian).
20. Volchuk V., Klymenko I., Kroviakov S. and Orešković M. Method of material quality estimation with usage of multifractal formalism. *Tehnički glasnik – Technical Journal*. 2018, vol. 12, no. 2, pp. 93–97.
21. Volchuk V.N. *K voprosu o primenenii teorii mul'tifraktalov dlya otsenki mekhanicheskikh svoystv metalla* [On the application of the theory of multifractals for the evaluation of the mechanical properties of a metal]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2014, no. 3, pp. 12–19. (in Russian).
22. Volchuk V.M. *Model' otsinyuvannya tverdosti chavunnykh valkiv CIIXH-43 ta CIIXHΦ-47* [Model of assessment of the hardness of the iron rollers CIIXH-43 and CIIXHΦ-47]. *Metallovedenie i termicheskaya obrabotka metallov* [Metall Science and Heat Treatment of Metals]. 2014, no. 3, pp. 12–19. (in Ukrainian).

Надійшла до редакції: 15.08.2025.