

4. Самые опасные дороги и перекрестки в Днепропетровске. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://dnepr.on-nash.dp.ua/novosti/opasnyeperekrestki>

5. Principles and Instruments for Improving Traffic Safety on Rural Roads The International Experience. 2008. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://bdd-lenobl.ru/comission.htm#10>

УДК 593.3

РАСЧЕТ ПНЕВМОПАНЕЛЬНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Е. И. Прудько, к. т. н., доц.

Ключевые слова: пневмопанельные конструкции, напряженно-деформированное состояние, метод осреднения, аналитические решения

Постановка проблемы и её связь с научными и практическими задачами. Пневмопанельные строительные конструкции (ППК) (рис. 1) находят применения в качестве перекрытий больших площадей спортивных площадок, складов и т. п. Конструктивные схемы ППК, представленные на рисунке 1, можно разделить на три группы: конструкции, составленные из пневматических стержней (рис. 1, а, б); конструкции с гладкими несущими полотнищами (рис. 1, в – е); конструкции с волнистыми или подушкообразными формами несущих полотнищ (рис. 1, ж, з). В статье, не нарушая общности, рассматриваются плоские ППК (рис. 1, а).

При большом числе пневмоэлементов численные исследования напряженно-деформированного состояния ППК вызывают значительные трудности. Поэтому разработка эффективных аналитических подходов к расчету таких конструкций является актуальной.

Анализ последних исследований и публикаций. В работах [1 – 4] в приближении континуальной теории получены разрешающие уравнения для некоторых типов пневмопанельных конструкций (ППК). Использован феноменологический подход к построению расчетных моделей ППК, согласно которому неоднородная конструкция представляется однородной, двухслойной или трехслойной гладкой оболочкой. Полученные системы разрешающих уравнений расчетных моделей ППК учитывают все основные особенности этих конструкций. Вместе с тем континуальная теория ППК не позволяет произвести оценку области ее применимости и получить уточненные решения, когда это необходимо.

Цель статьи. Разработка уточненного подхода к расчету ППК, позволяющего учесть неоднородность геометрии, жесткости и структуры этих конструкций.

Основной материал. Расчетную модель ППК, состоящую из пневматических балок, соединенных между собой по образующим (рис. 1, а), представим эквивалентной пластиной ($0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$) с ослаблениями в виде шарниров, расположенных по линиям $y = y_i = 2r_0 i$. При деформировании такой конструкции по линиям шарниров образуются изломы. Угол поворота нормали в направлении оси y при переходе через шарнир претерпевает скачкообразное изменение:

$$\theta_2 = \bar{\theta}_2 - \sum_{i=1}^k \Delta \cdot \theta_{2i} \cdot H \cdot (y - y_i), \quad (1)$$

где $H(y - y_i)$ – единичная функция Хевисайда;

$\bar{\theta}_2$ – угол поворота нормали в интервале между изломами;

k – количество шарниров.

Если предположить, что изгибная деформация пластины подчиняется гипотезе Кирхгофа – Лява, то параметры кривизны и кручения представляются выражениями

$$x_2 = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^k \Delta \theta_{2i} \delta_i; \quad x_1 = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad \tau_2 = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \theta_{2i}}{\partial x} H_i; \quad (2)$$

где $\delta_i = \delta(y - y_i)$ – дельта-функция Дирака.

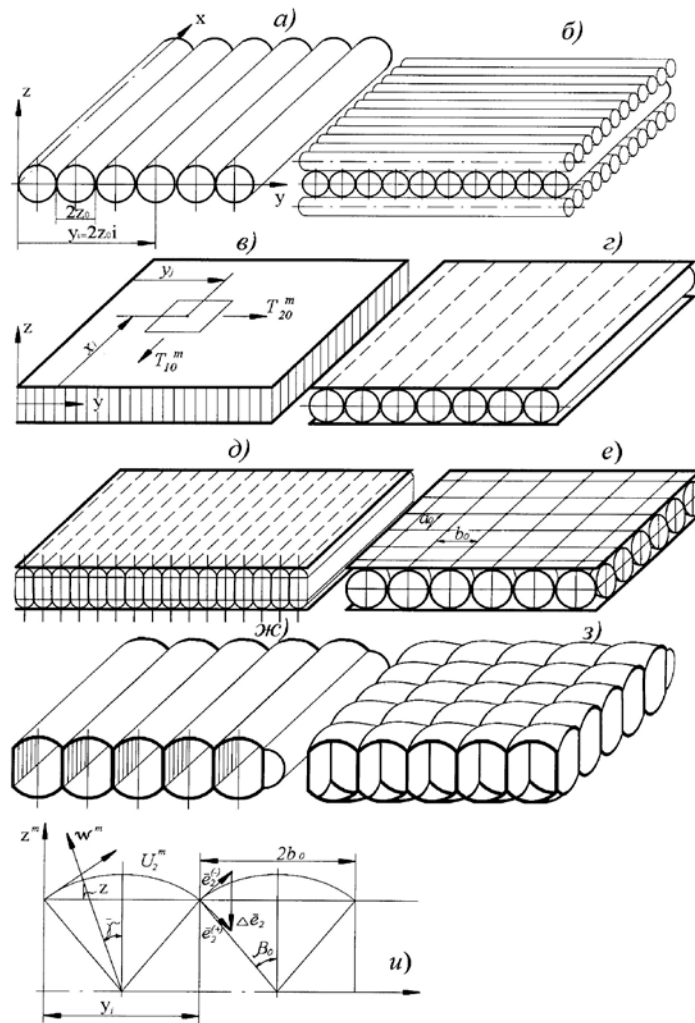


Рис. 1. Виды пневмопанельных конструкций

Уравнение изгиба пластины запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q_3 = 0. \quad (3)$$

Физические соотношения для конструктивно-ортотропной пластины с учетом (2) представим выражениями

$$\begin{aligned} M_1 &= -(B_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}) + B_{12} \sum_{i=1}^k \Delta \theta_{2i} \delta_i ; \\ M_2 &= -(B_{22} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + B_{21} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}) + B_{22} \sum_{i=1}^k \Delta \theta_{2i} \delta_i ; \\ M_{12} &= -C_{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{C_{12}}{2} \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \Delta \theta_{2i}}{\partial x} H_i ; \end{aligned} \quad (4)$$

где B_{ij} , C_{ij} – эффективные жесткости пневмобалок ППК.

Ввиду наличия шарниров будем иметь

$$M_2 = 0, \text{ при } y = y_i. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3) и учитывая, что $\frac{\partial H_i}{\partial y} = \delta_i$,

получаем разрешающее уравнение задачи:

$$B_{11} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + (B_{12} + 2C_{12} + B_{21}) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} =$$

$$= q_3 + (B_{12} + C_{12}) \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 \Delta \theta_{2i}}{\partial x^2} \delta_i + B_{22} \sum_{i=1}^k \Delta \theta_{2i} \delta_i^{11}; \quad \text{где } \delta_i'' = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta(y - y_i). \quad (6)$$

Внешняя нагрузка q_3 в (6) в общем случае может складываться как из распределенной по площади \tilde{q}_3 , так и по линиям шарниров θ_{3i} :

$$q_3 = \tilde{q}_3 + \sum_{i=1}^k \theta_{3i} \delta_i \quad (7)$$

Представляя искомую функцию прогиба, угла поворота и нагрузку бесконечными рядами вида:

$$\omega \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(y) f_{\omega n}(x), \dots, q_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{q}_{3n}(y) f_{qn}(x)$$

и применяя в зависимости от граничных условий при $x = 0, x = L_x$ метод тригонометрических рядов или интегральных соотношений [12], приходим к уравнению вида:

$$A_{1n} \frac{d^4 \omega_n}{dx^4} + A_{2n} \frac{d^2 \omega_n}{dx^2} + A_{3n} \omega_n = \tilde{q}_{3n} + \sum_{i=1}^k \theta_{3in} \delta_i + A_{4n} \sum_{i=1}^k \Delta \theta_{2in} \delta_i + A_{5n} \sum_{i=1}^k \Delta \theta_{2in} \delta_i'' \quad (8)$$

Метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами типа δ -функций и их производных [7] позволяет получить точное решение уравнения (8). После нахождения аналитического решения уравнения (8) неизвестные коэффициенты $\nabla \theta_{2in}$ определяются из условия равенства нулю изгибающего момента M_2 на линиях шарниров (5).

При большом количестве элементов, образующих ППК, получить точное решение уравнения (8) становится крайне затруднительным. Тогда при малой изменчивости нагрузки \tilde{q}_3 ($Q_{3i} = 0$) вдоль координаты y , когда ее характерный период L существенно превышает расстояние между шарнирами $2r_0$, естественно перейти к усредненному описанию. Для этого воспользуемся методом осреднения с техникой двухмасштабного разложения [8; 9]. Суть его состоит в том, что вместо одной из исходных переменных (в данном случае y) вводятся две – «медленная» (y_1) и «быстрая» (η). Первая имеет тот же масштаб измерения, что и исходная переменная y , и позволяет описать осредненные компоненты решения. Для быстрой «переменной» $\eta = \varepsilon^{-1} y$ ($\varepsilon = 2r_0 / L$) характерен масштаб, равный расстоянию между шарнирами. Ее можно использовать для описания «локальных» составляющих решения, то есть составляющих, изменение которых по координате y определяется расстоянием между шарнирами.

Производная по координате y будет определяться так:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (9)$$

Представим искомые моменты и нормальные перемещения ω в виде асимптотических разложений по малому параметру ε

$$M_1 = M_1^{(0)}(x, y_1, \eta) + \varepsilon^2 M_1^{(1)}(x, y_1, \eta) + \dots, \quad M_2 = M_2^{(0)}(x, y_1, \eta) + \varepsilon^2 M_2^{(1)}(x, y_1, \eta) + \dots,$$

$$M_{12} = M_{12}^{(0)}(x, y_1, \eta) + \varepsilon^2 M_{12}^{(1)}(x, y_1, \eta) + \dots, \quad \omega = \omega_0(x, y_1) + \varepsilon^2 [\omega_{10}(x, y_1) + \omega_1(x, y_1, \eta)] + \dots \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в уравнение (3) и физические соотношения для ортотропных пластинок-полосок, заключенных между шарнирами, и производя асимптотические расщепления по степеням ε , получаем:

$$\frac{\partial^2 M_2^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 M_{12}^{(0)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2^{(0)}}{\partial y_1 \partial \eta} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 M_1^{(0)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(0)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{12}^{(0)}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 M_2^{(0)}}{\partial \eta^2} = -q_3; \quad M_1^{(0)} = -[B_{11} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + B_{12} (\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \eta^2})];$$

$$M_2^{(0)} = -[B_{22}(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \eta^2}) + B_{21} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}]; M_{12}^{(0)} = -C_{12} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) найдем: $\omega_1 = c_1(x, y_1) + c_2(x, y_1)\eta + c_3(x, y_1)\eta^2 + c_4(x, y_1)\eta^3$. Для определения произвольных постоянных $c_i(x, y_1)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) воспользуемся условием периодичности функции ω_1 на интервале $(0, L)$ и равенства нулю момента M_2 в шарнирах:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \eta^2}\right) + \frac{B_{21}}{B_{22}} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = 0; \omega_1 / \eta = 0 = \omega_1 / \eta = L \text{ при } \eta = 0, L.$$

Получаем, что произвольная постоянная C_i может быть любой, в частности, равной нулю,

$$C_4 = 0, C_2 = -L, C_3 = 0,5; \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y_1^2} + \frac{B_{21}}{B_{22}} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}\right).$$

Окончательно для ω_1 имеем:

$$\omega_1 = -0,5 \left(\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y_1^2} + \frac{B_{21}}{B_{22}} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}\right) (\eta - L)\eta. \quad (12)$$

Тогда выражения для моментов примут вид:

$$M_2^{(0)} = 0; M_1^{(0)} = -\left(B_{11} \frac{B_{12} B_{21}}{B_{22}}\right) \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2}; M_{12}^{(0)} = -C_{12} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y},$$

а осредненное уравнение равновесия соответственно запишется так

$$\left(B_{11} \frac{B_{12} B_{21}}{B_{22}}\right) \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4} + 2C_{12} \frac{\partial^4 \omega_0}{\partial x^4 \partial y^4} = q_3. \quad (13)$$

Если положить $B_{22} \rightarrow \infty$, что справедливо при большом K – числе элементов, то уравнение, аналогичное (13), можно было получить, рассматривая ППК как полубезмоментную пластину с конечной жесткостью на кручение C_{12} .

Определив ω_0 из (13), можно по формуле (12) подсчитать уточненную добавку к подгибу ω_1 .

Далее рассмотрим ППК второй группы (рис. 1, в, з, д, е). Для этих конструкций характерно дискретное взаимодействие несущих полотнищ со стяжками, роль которых здесь выполняют часто поставленные нити («аэромат», рис. 1, в), а также вкладные мягкие цилиндрические (рис. 1, з, д) или сферические емкости (рис. 1, е). Особенностью ППК, представленной на рисунке 1, д, является то, что вкладные емкости таким образом прикреплены к несущим полотнищам, что в исходном состоянии они контактируют друг с другом по площадкам конечной величины. Это обеспечивает предварительное растяжение несущих полотнищ, подобно тому, как это имеет место в «аэромате».

Для определенности рассмотрим ППК, которые могут быть описаны двухслойной конструкцией с периодическими нормально ориентированными упругими связями, контактирующими с несущими слоями в точках (x_i, y_i) . Пусть для общности модели несущие слои будут моментными пластинами, которые в исходном состоянии растянуты усилиями $T_{10}^m, T_{20}^m (m \rightarrow n)$. Пространство между несущими пластинами заполнено воздухом под избыточным давлением P_o , которое при деформировании конструкции будем считать неизменным. Тогда упругие связи в исходном состоянии являются растянутыми усилиями N_{0ij} . Пластины же, испытывающие действие нормального давления P_o на участках между точками контакта со связями, остаются плоскими.

Уравнение равновесия несущих пластин представим в виде:

$$\frac{\partial T_1^m}{\partial x} + \frac{\partial S^m}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(T_{10}^m \epsilon_2^m) + \frac{\partial}{\partial y}(T_{20}^m \omega_2^m) + q_1^m - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b N_{ij}^m \delta_i \delta_j = 0; \frac{\partial M_1^m}{\partial x} + \frac{\partial M_{21}^m}{\partial y} - \theta_1^m = 0,$$

$$(I \Leftrightarrow 2), (x \Leftrightarrow y);$$

$$\frac{\partial \theta_1^m}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2^m}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(T_{10}^m \theta_1^m) - \frac{d}{dy}(T_{20}^m \theta_2^m) + q_3^m - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l N_{3ij}^m \delta_i \delta_j = 0, \quad (14)$$

$$(m \rightarrow n) \text{ где } \delta_j = \delta(x - x_j)$$

Для уравнения n -й пластины помимо замены индексов ($m \rightarrow n$) необходимо заменить знаки перед компонентами усилий контактного взаимодействия связей с несущими пластинами N_{1ij}^m , N_{2ij}^m, N_{3ij}^m , ($m \rightarrow n$).

При деформировании конструкции, в ее поперечных сечениях возникают дополнительные усилия и моменты от сил давления P_o . Для учета этих факторов составим уравнение равновесия «воздушного» слоя:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-a}^a P_0 (1 + \varepsilon_2^{cz}) \tilde{e}_1^z dz \right] dx dy - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-a}^a P_0 (1 + \varepsilon_1^{cz}) \tilde{e}_2^z dz \right] dx dy = 0, \quad (15)$$

где $a = \frac{h_0}{2}(1 + \varepsilon_s)$ – полутолщина конструкции в деформированном состоянии. Величина ε_s определяет относительное изменение высоты поперечного сечения конструкции.

Выражая орты \tilde{e}_1^z и \tilde{e}_2^z через орты деформированного состояния срединной поверхности конструкции по формулам:

$$\tilde{e}_1^z = \bar{e}_1^c + \omega_2^{cz} \bar{e}_2^c - \theta_1^c \bar{e}_3^c, (1 \leftrightarrow 2), \quad (16)$$

принимая закон изменения обобщенных деформаций «воздушного» слоя в виде:

$$\varepsilon_1^{cz} = \varepsilon_1^c + z \frac{\partial \theta_1^c}{\partial x} \quad ; \quad \omega_1^{cz} = \omega_1^c + z \frac{\partial \theta_2^c}{\partial x}, (1 \leftrightarrow 2, x \leftrightarrow y), \quad (17)$$

подставляя (16) и (17) в (15) и вычисляя определенные интегралы, получим три скалярных выражения которые по существу учитывают влияние сил давления P_o :

$$-P_0 h_0 \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_s + \varepsilon_3^c) - P_0 h_0 \frac{\partial \omega_1^c}{\partial y} = 0, (1 \leftrightarrow 2, x \leftrightarrow y) \quad -P_0 h_0 \frac{\partial}{\partial x} (-\theta_1^c) - P_0 h_0 \frac{\partial}{\partial y} (-\theta_2^c) = 0. \quad (18)$$

Дополнительные моменты от сил давления вычислим по формулам:

$$M_1^P = \int_{-a}^a P_0 (1 + \varepsilon_2^{cz}) z dz, (1 \leftrightarrow 2)$$

Или с учетом (17) и линейности задачи получим

$$M_1^P = -\frac{P_0 h_0^3}{12} \frac{\partial \theta_2^c}{\partial y}, (1 \leftrightarrow 2; y \rightarrow x). \quad (19)$$

Полагая, что упругие связи соединены с несущими пластинами шарнирно, выразим усилия контактного взаимодействия через усилия в упругих связях

$$N_{1ij}^m = (N_{0ij} + N_{ij}) \sin(\theta_{1ij}^c - \theta_{1ij}^m); (1 \rightarrow 2), (m \rightarrow n) \quad N_{3ij}^m = N_{ij} \cos(\theta_{1ij}^c - \theta_{1ij}^m) \cos(\theta_{2ij}^c - \theta_{2ij}^m); (m \rightarrow n) \quad (20)$$

Помня, что уравнения равновесия несущих пластин (14) и уравнения «воздушного» слоя (18) записаны относительно недеформированной системы координат, уравнения равновесия для конструкций в целом получим простым суммированием соответствующих уравнений. При этом учтем также, что моментность конструкции обеспечивается не только моментностью пластин и «воздушного» слоя, но и разнесением этих пластин на расстояние $0.5h_0(1 + \varepsilon_s)$ от срединной поверхности. Принимая во внимание соотношения (17) и (20) с учетом вышесказанного, линейные уравнения равновесия для конструкции получим в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} [T_{10}^m \varepsilon_2^m + T_{10} \varepsilon_2 - 0.5 P_0 h_0 (\varepsilon_2^m + \varepsilon_2^n)] - P_0 h_0 \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [T_{20}^m \omega_2^m + T_{20} \omega_2^n - 0.5 P_0 h_0 (\omega_1^m + \omega_1^n)] + \\ + q_1 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^e (N_{0ij} + N_{ij}) (-\theta_{1ij}^m + \theta_{1ij}^n) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0, \quad (21) \\ (1 \leftrightarrow 2), (x \leftrightarrow y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} [T_{10}^m \theta_1^m + T_{10}^n \theta_1^n - P_0(u_1^m - u_1^n)] - \frac{\partial}{\partial y} [T_{20}^m \theta_2^m + T_{20}^n \theta_2^n - P_0(u_2^m - u_2^n)] + q_3 = 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{21}}{\partial y} - Q_1 + \frac{\partial M_1^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{21}^2}{\partial y} + \frac{h_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} (T_{20}^m \varepsilon_2^m - T_{10}^n \varepsilon_2^n) + \\ + \frac{h_0}{2} \frac{\partial}{\partial y} (T_{20}^m \omega_2^m - T_{10}^n \omega_2^n) + m_1 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^e (N_{0ij} + N_{ij}) \times \\ \times [(u_1^m - u_1^n) 2h_0^{-1} - \theta_{1ij}^m - \theta_{1ij}^n] \cdot \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = 0, (1 \leftrightarrow 2), (x \leftrightarrow y) \end{aligned}$$

где $T_1 = T_1^m + T_1^n$, $M_1 = M_1^m + M_1^n$, $\theta_1 = Q_1^m + Q_1^n, (1 \rightarrow 2)$ $S = S^m + S^n$, $M_1' = \frac{h_0}{2} (T_1^m + T_1^n), (1 \rightarrow 2)$

$$M_{21}^t = M_{12}^t = \frac{h_0}{2} (S^m - S^n), \quad q_1 = q_1^m + q_1^n, (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3).$$

В уравнениях (21) учтено, что в силу прямолинейности связей при деформировании и линейности рассматриваемой задачи, проекции угла их поворота

$$\theta_{1ij}^c = h_0^{-1} (u_1^m - u_1^n) \delta(x - x_i, y - y_i), (1 \rightarrow 2).$$

Для вычисления N_{ij} получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (Q_1^m - Q_1^n) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_2^m - Q_2^n) - \frac{\partial}{\partial x} (T_{10}^m \theta_1^m - T_{10}^n \theta_1^n) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} (T_{20}^m \theta_2^m - T_{20}^n \theta_2^n) + \bar{q}_3 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^e 2N_{ij} \delta(x - x_i, y - y_i), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\bar{q}_3 = q_3^m - q_3^n$.

Физические и геометрические соотношения позволяют записать систему (21), (22) относительно группы неизвестных:

$$\{u_1^m, u_2^m, \omega^m, u_1^n, u_2^n, \omega^n, \}.$$

Если несущие пластины безмоментны, что соответствует, например, ППК типа «аэромат», то в уравнениях (21), (22) следует положить $M_1 = Q_1 = 0 (1 \rightarrow 2)$. При устремлении числа связей (в данном случае нитей-стяжек) к бесконечности можно осуществить предельный переход типа:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{i=1}^k f(x_i, y) \delta(x, x_i) = \int_{x_1}^{x_2} f(\tilde{x}, y) \delta(x, \tilde{x}) d\tilde{x} = f(x, y).$$

Тогда приходим к расчетным уравнениям континуальной теории ППК типа «аэромат» [4]. Расстояние между стяжками реальных конструкций «аэроматов» настолько мало (2 – 4 мм) по сравнению с размерами в плане, что уточнения, связанные с дискретностью нитей-стяжек вряд ли необходимы. Но для конструкций со стяжками, выполненными в виде вкладных емкостей, точности континуального решения может быть недостаточно.

Для примера рассмотрим конструкцию со сферическими вкладными емкостями (рис. 1, е). Пусть несущие слои являются моментными пластинами, а контакт их со стяжками осуществляется в точках (x_i, y_i) . Продемонстрируем применение метода осреднения для задачи об изгибных колебаниях этой конструкции. Исходные уравнения можно записать так:

$$D \nabla^4 \omega_m - \rho_m \omega^2 \omega_m - C(\omega_m - \omega_n) \Phi(x, y) = 0, (m \rightarrow n), \quad (23)$$

где $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \delta(x - a_{oi}, y - b_{oj})$;

C – жесткость связей при поперечном обжатии;

ω – частота собственных колебаний системы;

D – цилиндрическая жесткость пластин;

ρ – масса единицы площади пластин.

Пусть для определенности пластины защемлены по торцам

$$\omega^m = \frac{\partial \omega_m}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 0, L_x, \quad \omega = \frac{\partial \omega_m}{\partial y} = 0, \text{ при } y = 0, L_y, (m \rightarrow n) \quad (24)$$

При достаточно большом количестве вкладных емкостей и формах колебаний, захватывающих несколько связей, можно в первом приближении перейти к осредненной системе

$$D\nabla^4 \omega_m^{(0)} - \rho \omega_0^2 \omega_m^{(0)} - C_1 [\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)}] = 0, (m \rightarrow n); \quad C_1 = C / a_0 b_0 \quad (25)$$

Для получения уточненного решения применим методику работ [10; 11], согласно которой решение исходной краевой задачи (22), (24), представим в виде:

$$\omega_m = \omega_m^{(0)} + \omega_m^{(1)}, (m \rightarrow n); \quad \omega^2 = \omega_0^{(2)} + \omega_1^{(2)}.$$

Тогда, учитывая (25), для «дополнительных» перемещений $\omega_m^{(1)} (m \rightarrow n)$ и поправки к частоте ω_1 получаем такие уравнения:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 \omega_m^{(1)} - \rho \omega^2 \omega_m^{(1)} - C [\omega_m^{(1)} - \omega_n^{(1)}] \Phi(x, y) = \\ = C [\Phi(x, y) - a_0^{-1} b_0^{-1}] \cdot [\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)}] + \rho \omega_1^2 \omega_m^{(0)}, (m \rightarrow n). \end{aligned} \quad (26)$$

Правая часть уравнений (26) содержит компоненты, быстропеременные по x , по y и по x, y . Следовательно, и в решении $\omega_m^{(1)} (m \rightarrow n)$ можно выделить быстрые по этим переменным части и сформулировать для них адекватные краевые задачи. Функцию $\omega_m^{(1)} (m \rightarrow n)$ представим в виде $\omega_m^{(1)} = \omega_{m1}^{(1)} + \omega_{m2}^{(1)} + \omega_{m3}^{(1)} (m \rightarrow n)$. Для определения соответствующих частных решений уравнений (26) можно оставлять в левых частях лишь производные максимального порядка по x , по y и по x, y [10; 11]

$$a) \quad D \frac{\partial^4 \omega_{m1}^{(1)}}{\partial x^4} = C_1 [\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)}], \quad \omega_{m1}^{(1)} = \frac{\partial^4 \omega_{m1}^{(1)}}{\partial x^4} = 0, \text{ при } x = a_0, 2a_0, (m \rightarrow n);$$

$$б) \quad D \frac{\partial^4 \omega_{m2}^{(1)}}{\partial y^4} = C_1 [\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)}], \quad \omega_{m2}^{(1)} = \frac{\partial^4 \omega_{m2}^{(1)}}{\partial y^4} = 0, \text{ при } y = b_0, 2b_0, (m \rightarrow n);$$

$$в) \quad D\nabla^4 \omega_{m3}^{(1)} = C_1 [\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)}], \quad \omega_{m3}^{(1)} = \frac{\partial \omega_{m3}^{(1)}}{\partial x} = 0, \text{ при } x = a_0, 2a_0;$$

$$\omega_{m3}^{(1)} = \frac{\partial \omega_{m3}^{(1)}}{\partial y} = 0, \text{ при } y = b_0, 2b_0. \quad (27)$$

Решение краевых задач (27, а – в) периодически продолжается на всю область. Оно без труда может быть получено методом Канторовича.

Поправка к частоте собственных колебаний ω_1 определяется из осредненных уравнений (26), в правых частях которых выделены медленные составляющие [11]:

$$D\nabla \omega_m^{(10)} - \rho \omega_0^2 \omega_m^{(10)} - \rho \omega_1^2 \omega_m^{(0)} - C_1 \omega_m^{(10)} = \overline{M}_{xy} [\omega_m^{(11)} - \omega_n^{(11)}], \quad (28)$$

где $\overline{M}_{x,y} = a_0^{-1} b_0^{-1} \int_0^{2a_0} \int_0^{2b_0} (...) dx dy$ – оператор осреднения.

Из условия ортогональности решения уравнения (28) его правой части [13] получаем:

$$\omega_1^2 = \frac{c \rho^{-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \overline{M}_{xy} [\omega_m^{(11)} - \omega_n^{(11)}] \cdot [\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)}] dx dy}{\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} [\omega_m^{(0)2} + \omega_n^{(0)2}] dx dy}.$$

Конструкция с волнистыми формами несущих полотнищ (рис. 1, ж) считает в себе разрывности параметров, характерных для ППК первой и второй групп. Кроме того, кривизны несущих полотнищ этих конструкций претерпевают на линиях контакта со стяжками бесконечные разрывы (рис. 1, и):

$$k^m = \frac{1}{r_0} - \sum_{i=1}^k 2 \sin \beta_0 \delta(y - y_i), (m \rightarrow n, r_0 \rightarrow -r_0, \sin \beta_0 \rightarrow -\sin \beta_0).$$

Расчетную схему такой конструкции будем строить следующим образом.

Приведем усилия исходного состояния, действующие в несущих полотнищах, к плоскостям их плана, проходящим через линии контакта со стяжками. Тогда будем иметь неоднородную конструкцию, состоящую из двух пластин с ослаблениями в виде линейчатых шарниров, упруго взаимодействующих посредством периодических связей. Действие связей распространяется только по линии шарниров $y = y_i$. В исходном состоянии эквивалентные пластины нагружены растягивающими усилиями и моментами:

$$T_{10}^{m*} = T_{10}^m \frac{l_0}{2b_0}; T_{20}^{m*} = T_{20}^m \cos \tilde{\gamma}; M_{20}^m = T_{20}^{m*} Z^m; M_{10}^m = T_{10}^m Z^m,$$

где

$$\tilde{\gamma} = \arcsin\left(\frac{b_0}{2} - y\right) r_0^{-1} H(y_1 - y) + \sum_{i=1}^{k-1} \arcsin\left[\frac{b_0}{2} - (y - y_i)\right] r_0^{-1} \times [H(y - y_i) - H(y - y_{i+1})],$$

$$Z^m = \left(-\frac{h_0}{2} + \sqrt{h_0^2 / 4 + b_0 y - y^2}\right) H(y_1 - y) + \sum_{i=1}^{k-1} [-h_0 / 2 + \sqrt{h_0^2 / 4 + b_0 (y - y_i)(y - y_{i+1})}] [H(y - y_i) - H(y - y_{i+1})].$$

Далее, следуя методике вывода уравнений равновесия с учетом разрывности параметров для ППК первой и второй групп, приходим к разрешающим уравнениям для рассматриваемой конструкции. Применяя, как и ранее, метод осреднения для этих уравнений, получаем ряд краевых задач, из которых можно определить осредненные и уточненные составляющие решений. Искомые функции перемещений плоскостей плана u_1^{m*} , u_2^{m*} , ω^{m*} позволяют вычислить соответствующие перемещения несущих полотнищ а, следовательно, однозначно вычислить параметры напряженно-деформированного состояния ППК:

$$u_1^m = u_1^{m*} + z^m \frac{u_1^{m*} - u_1^{n*}}{h_0};$$

$$u_2^m = u_2^{m*} \cos \tilde{\gamma} + \omega^{m*} \sin \tilde{\gamma};$$

$$\omega^m = \omega^{m*} \cos \tilde{\gamma} + u_2^{m*} \sin \tilde{\gamma}.$$

Вывод. Полученные расчетные уравнения некоторых типов ППК с учетом разрывности параметров позволяют разделить искомое напряженно-деформированное состояние на быстро и медленно изменяющиеся составляющие. В результате появляется возможность аналитических решений.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Огай С. А.** Континуальная схема расчета пневмопанельных оболочек / Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам. – Владивосток, 1980. – Вып. 38. – С. 135 – 142.
2. **Друзь Б. И., Огай С. А.** Построение трехслойной модели цилиндрической пневмопанельной конструкции / Исследования по судовым мягким и гибким конструкциям. – Владивосток, 1981. – С. 40 – 54.
3. **Друзь Б. И., Огай С. А.** К теории пневмопанельных конструкций / Исследования по судовым мягким и гибким конструкциям. – Владивосток, 1981. – С. 55 – 70.
4. **Огай С. А.** Уравнения статического равновесия плоского «аэромата» / Исследования по судовым мягким и гибким конструкциям. – Владивосток, 1982. – С. 29 – 38.
5. **Новицкий В. В.** Дельта-функция и ее применение в строительной механике / Расчет пространственных конструкций. – М. : Госстройиздат, 1962. – Вып. 8. – С. 207 – 244.
6. **Вайнберг Д. Б., Ройтфарб И. З.** Расчет пластин и оболочек с разрывными параметрами / Расчет пространственных конструкций. – М. : Стройиздат, 1965. – Вып. 10. – С. 39 – 80.
7. **Михайлов Б. К.** Пластины и оболочки с разрывными параметрами. – Л. : Ленинградский университет, 1980. – 196 с.
8. **Коул Д.** Методы возмущений в прикладной математике. – М. : Мир, 1972. – 274 с.
9. **Найфе А.** Методы возмущений. – М. : Мир, 1976. – 456 с.

10. Андрианов И. В., Маневич Л. И. К расчету напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости / Изв. АН СССР. – Механика твердого тела, 1975. – № 4. – С. 135 – 140.

11. Лесничая В. А., Маневич Л. И. Асимптотическое исследование колебаний пластин, подкрепленных ребрами жесткости. – Прикладная механика, 1980. – Т. 16. – № 7. – С. 67 – 72.

12. Awrejcewicz J., Andrianov I., Manevitch L. Asymptotic Approaches in Nonlinear Dynamics : New Trends and Applications. – Heidelberg : Springer Verlag, 1998. – 310 с.

УДК 519.6:504.3.054

РАСЧЕТ КАЧЕСТВА ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ В СЕЛИТЕБНЫХ РАЙОНАХ ГОРОДА

*Т. И. Русакова**, асс., *Н. Н. Беляев***, д. т. н., проф.

**Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара*

***Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
им. академика В. Лазаряна*

Ключевые слова: интенсивность выброса, загрязнение от автотранспорта, рассеивание загрязняющих веществ, завихренность, уравнение переноса примеси, численная модель, концентрация загрязнения, селитебный район города.

Постановка проблемы и анализ публикаций. Как известно, автотранспорт является одним из наиболее мощных источников загрязнения воздушной среды. Территорию современных крупных городов пересекают автомобильные магистрали, общее число которых может превышать несколько тысяч. Прогноз качества воздушной среды при проектировании микрорайонов является первостепенной задачей. Для ее решения на практике широко используют эмпирические модели (Джонсона, «STREET») и аналитические модели типа моделей Гаусса и ее модификаций [2; 3; 8; 11]. Широкое применение этих моделей обусловлено тем, что при их реализации требуются малые затраты компьютерного времени и небольшая входная информация. Но модели данного класса не позволяют учесть влияние зданий на формирование зоны загрязнения. Применение CFD моделей, основанных на численном интегрировании уравнений Навье – Стокса [1; 4; 9; 10; 13] и тех или иных моделей турбулентности [12] представляет собой большие практические сложности. Поэтому модели данного класса не могут быть использованы для серийных расчетов в настоящее время.

Целью данной работы является разработка численной модели, позволяющей оперативно прогнозировать качество воздушной среды в микрорайонах в случае выбросов от автотранспорта и учесть при расчете такие важные факторы как скорость ветра, атмосферная диффузия, интенсивность эмиссии загрязняющих веществ от автотранспорта, форма и взаимное расположение зданий вблизи автомагистралей.

Математическая модель. Расчет переноса загрязняющих веществ на улицах с учетом зданий разбивается на два этапа. Сначала решается задача по определению поля скорости ветра при обтекании зданий. Для ее реализации используется модель отрывных вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости [4]. Основными уравнениями являются: уравнение переноса завихренности (1) и уравнение Пуассона (2) для расчета функции тока

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (2)$$

где $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ – завихренность; ψ – функция тока; $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Так как при отрыве потока, который происходит в угловых точках зданий, образуются вихри, возникает задача расчета их интенсивности.

Для уравнений гидродинамики (1), (2) ставятся следующие граничные условия.