

УДК 669.268

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОЛНООБРАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ МЕТАЛЛА, ЭЛЕКТРООСАЖДАЕМОГО
ПРИ ВНЕШНЕМ СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

И. М. Кузьяев, д. т. н., проф., О. Б. Гирин, д. т. н., проф.

*Украинский государственный химико-технологический университет,
г. Днепропетровск*

Введение. В работах [1–3] выполнены структурные исследования металлов, электроосажденных при действии внешней (центробежной) силы параллельно фронту кристаллизации. На основании анализа полученных данных был установлен эффект волнообразного течения поверхностных слоев электроосаждаемых металлов в направлении действия внешней силы с выгибанием волн механическими препятствиями и возникновением пены на гребнях волн. Полученный результат доказывает достоверность разрабатываемой концепции фазообразования электроосаждаемых металлов через стадию жидкого состояния [4; 5].

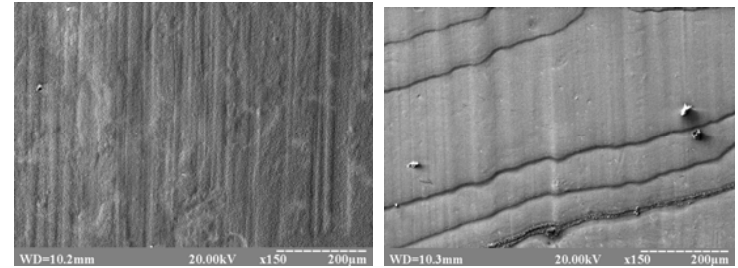
В частности, обнаруженный эффект свидетельствует о том, что возникающие в разных участках катода кластеры атомов электроосаждаемого металла, находясь в жидком состоянии, под действием внешней силы параллельно фронту кристаллизации, объединяются в жидкие поверхностные слои. В этих слоях металла, которые постоянно обновляются в процессе электроосаждения и находятся до затвердевания в жидком состоянии, могут быть вызваны волновые процессы под действием внешней силы.

Цель – разработать математическую модель процесса волнообразного течения поверхностных слоев металла, электроосаждаемого при внешнем силовом воздействии параллельно фронту кристаллизации.

Материал и методика исследований. Материалом для исследования служили образцы никеля и меди, электроосажденные при внешнем силовом воздействии параллельно фронту кристаллизации. Состав электролитов, режимы осаждения и условия получения образцов в поле центробежной силы представлены в работе [1].

Математическое моделирование процесса волнового течения поверхностных слоев металла проводили с помощью дифференциальных уравнений движения, описывающих закон сохранения количества движения, и уравнения неразрывности, описывающего закон сохранения массы [6–8]. Для решения уравнений использовали интегральное преобразование Лапласа [9]. Программное воспроизведение разработанной математической модели осуществляли с помощью математического пакета Mathcad.

Результаты исследований и их обсуждение. Как свидетельствуют экспериментальные данные, при отсутствии действия внешней силы на электроосаждаемый металл поверхность осадков характеризовалась сглаженным рельефом, не содержащим волнообразных форм (рис. 1 а). При воздействии же на металл в процессе его электроосаждения силой, направленной параллельно фронту кристаллизации, на поверхности осадков фиксировались затвердевшие волны (рис. 1 б).



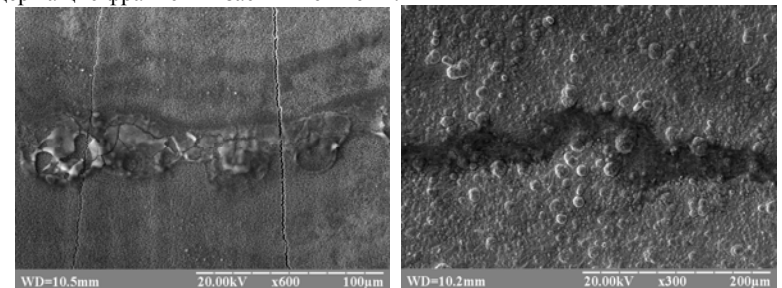
a

б

Рис. 1. Растровые электронномикроскопические изображения никеля, электроосажденного при силовом воздействии, пропорциональном центробежному ускорению величиной 1g (*a* – исходное состояние) и 1 256 g (*б*). Сила направлена сверху вниз

Характерной особенностью рельефа никелевых осадков, полученных в исходном состоянии (т. е. при отсутствии силового воздействия), явилось наследование ими микроскопических дефектов прокатанной медной подложки, на которую осаждался никель (рис. 1 *a*). В то же время никелевые осадки такой же толщины, осажженные в условиях значительного силового воздействия, практически не содержали дефектов, унаследованных от подложки. Как видно из рисунка 1 *б*, их поверхность была более сглаженной, характерной для металлической жидкости, твердеющей в процессе растекания по поверхности (за исключением участков, содержащих гребни волн).

Аналогично данным работ [1–3], на гребнях затвердевших волн имелась застывшая пена, что подтверждало волнообразный характер течения электроосаждаемого металла. Так, например, на рисунке 2 показаны участки гребней затвердевших волн на поверхности электроосажденных металлов, содержащие фрагменты застывшей пены.



a

б

Рис. 2. Растровые электронномикроскопические изображения никеля (*a*) и меди (*б*), электроосажденных под действием силы, пропорциональной ускорению величиной 35 g (*a*) и 140 g (*б*) и направленной сверху вниз

Представленные экспериментальные результаты подтверждают основной вывод работ [1–3], согласно которому при воздействии на металл в процессе электроосаждения внешней силой параллельно фронту кристаллизации наблюдается волнообразное течение его поверхностных слоев.

Для математического моделирования процесса такого волнообразного течения рассмотрим схему, представленную на рисунке 3.

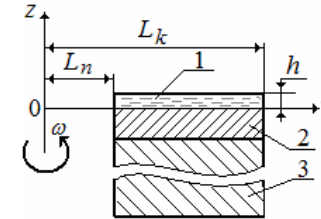


Рис. 3. Расчетная схема для построения математической модели: 1 – слой жидкой фазы; 2 – слой затвердевшей фазы; 3 – металлическая подложка

При математическом моделировании процессов течения различных типов жидких сред в общем случае следует использовать уравнение движения, которое в векторной форме (независимо от выбранной системы координат) имеет такой вид [6–8]:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \left[\nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \right] \pm \rho \cdot \vec{g} + \vec{F}_i, \quad (1)$$

где ρ – плотность материала; t – время; \vec{V} – вектор скорости движения материала; $D\vec{V}/Dt$ – субстанциональная производная от вектора \vec{V} ; ∇P – градиент давления; $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ – тензор напряжений; $\left[\nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \right]$ – векторное произведение вектора ∇ на тензор $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$; \vec{g} – вектор ускорения свободного падения; \vec{F}_i – дополнительные силы, вызванные различными энергетическими полями, отнесенными к единице объема; ∇ – вектор, который имеет вид:

$$\nabla = \vec{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (2)$$

где $\vec{\delta}_i$ – единичные векторы; x_i – оси координат (x , y , z).

Левая часть уравнения (1) представляет собой инерционный член уравнения движения, то есть является не чем иным, как произведением ускорения на массу, отнесенную к единице объема. Правая часть включает в себя такие члены: первый, стоящий после знака равенства, – сила, вызванная

давлением и отнесенная к единице объема; второй – силы, вызванные межмолекулярным переносом и также отнесенные к единице объема; третий – силы тяжести, отнесенные к единице объема (массовые силы) и четвертый – центробежная сила, отнесенная к единице объема.

Кроме уравнения движения необходимо также использовать уравнение неразрывности, которое в векторной форме для несжимаемой жидкости можно представить так:

$$\left(\nabla \cdot \vec{V} \right) = 0. \quad (3)$$

Последнее выражение представляет собой скалярное произведение вектора ∇ на вектор \vec{V} .

Для получения уравнений, описывающих процессы волнообразного течения жидкости в соответствии со схемой, представленной на рисунке 3, введем такие условия и допущения: система координат – декартова прямоугольная; проекцией скорости вдоль оси y , направленной перпендикулярно плоскости рисунка, будем пренебрегать (также будем пренебрегать и градиентами величин вдоль оси y); в уравнении движения в проекции на ось x будем пренебрегать силой давления и массовой силой, а будем учитывать второй и четвертый члены, входящие в уравнение (1); в уравнении движения в проекции на ось y будем пренебрегать силой давления и центробежной силой; процессы движения принимаем стационарными.

С учетом принятых допущений получаем такие уравнения движения в проекциях на оси:

$$\rho \cdot \left(V_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \cdot \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + F_c; \quad (4)$$

$$\rho \cdot \left(V_x \cdot \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - \rho \cdot g, \quad (5)$$

где F_c – центробежная сила, которую можно определить из выражения:

$$F_c = \rho \cdot \omega^2 \cdot x, \quad (6)$$

где ω – частота вращения рассматриваемой системы.

Уравнение неразрывности в проекциях на оси в данном случае запишется так:

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (7)$$

В качестве моделируемой среды принимаем ньютоновскую жидкость, для которой реологическое уравнение состояния имеет такой вид:

$$\sigma_{ij} = 2 \cdot \eta \cdot d_{ij}, \quad (8)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; η – коэффициент вязкости; d_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций, $d_{ij} = 1/2 \cdot (\partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i)$.

С учетом уравнений (7) и (8) градиенты напряжений, стоящие в правой части уравнений (4) и (5), можно записать таким образом:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 2 \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right); \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 2 \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Учитывая последние четыре соотношения, а также пренебрегая инерционными членами, уравнения движения (4) и (5) перепишем так:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot x}{\eta} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} - \frac{\rho \cdot g}{\eta} = 0. \quad (14)$$

Из двух последних уравнений видно, что в каждом из них имеется по одной искомой величине (проекции скорости), а значит, их можно решать независимо одно от другого.

Для решения уравнения (13) воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа [9]. При этом перенесем начало системы координат к левой границе слоя жидкой фазы и запишем такие начальные условия для оси x :

$$\left. \begin{aligned} V_x(0, z) &= 0; \\ \partial V_x(0, z) / \partial x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для оси z примем такие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} V_x(x, 0) &= 0; \\ \partial V_x(x, h) / \partial z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Первое условие из системы (16) характеризует условие прилипания жидкого поверхностного слоя к затвердевшему предыдущему слою.

Операторный аналог уравнения (13) с учетом условий (15) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 V_x^L}{dz^2} + s^2 \cdot V_x^L = -\frac{\rho \cdot \omega^2}{s^2 \cdot \eta}, \quad (17)$$

где V_x^L – изображение скорости V_x ; s – переменная преобразования Лапласа.

Решение уравнения (17) запишется так [10]:

$$V_x^L = -\frac{\rho \cdot \omega^2}{s^4 \cdot \eta} + C_1 \cdot \cos(s \cdot z) + C_2 \cdot \sin(s \cdot z). \quad (18)$$

Используя граничные условия (16), находим константы интегрирования C_1 и C_2 , после чего получаем выражение для x -компоненты скорости в изображениях в таком виде:

$$V_x^L = -\frac{\rho \cdot \omega^2}{s^4 \cdot \eta} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cos[s \cdot (h-z)]}{\cos(s \cdot h)} \right\}. \quad (19)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа для выражения (19), оригинал для x -компоненты скорости можно представить таким образом:

$$V_x(x, z) = \frac{\rho \cdot \omega^2}{6 \cdot \eta \cdot h} \cdot \sum_k (-1)^{k+1} \cdot \cos \left[\pi \cdot \left(k - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{h-z}{h} \right] \cdot [A_k(x) + B_k(x)], \quad (20)$$

$$\text{где } A_k(x) = \frac{96 \cdot h^4}{\pi^4 \cdot (2 \cdot k - 1)^4} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{x}{h} \right];$$

$$B_k(x) = (8 \cdot k^3 - 12 \cdot k^2 + 6 \cdot k - 1) \cdot \frac{h \cdot 2 \cdot x^3}{\pi \cdot (2 \cdot k - 1)^4};$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Уравнение (20) получено с использованием второй теоремы разложения и теоремы умножения (теоремы Бореля).

Найдем распределение скорости V_x для конкретных значений параметров, входящих в уравнение (20) и соответствующих волнообразному течению поверхностных слоев никеля, электроосаждаемого при внешнем силовом воздействии, а именно: $L_k - L_n = 50 \text{ мм}$; $h = 9 \cdot 10^{-6} \text{ мм}$;

$$\rho = 8620 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \omega = 50 \cdot \text{с}^{-1}; \quad \eta = 45000 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Результаты решения, полученные с помощью математического пакета MathCad, представлены на рисунке 4.

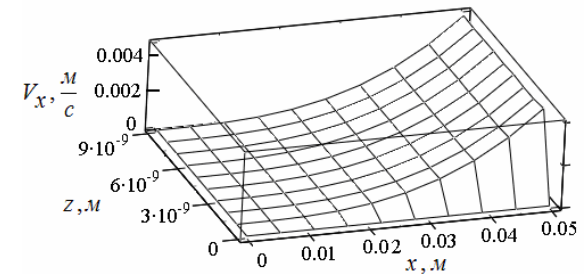


Рис. 4. Объемный график распределения скорости V_x для ньютоновской жидкости ($\eta = 45000 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$)

Как видно из рисунка 4, изменение скорости по осям носит плавно возрастающий характер, что также подтверждается и плоскими графиками распределения скорости вдоль оси x , представленными на рисунке 5.

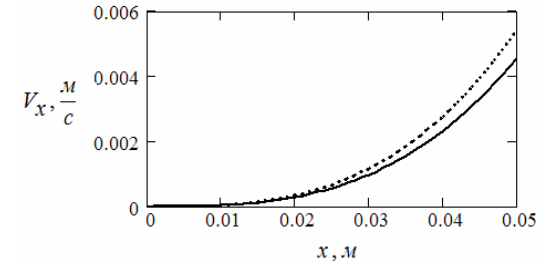


Рис. 5. Плоские графики распределения скорости V_x для ньютоновской жидкости ($\eta = 45000 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$) при разных значениях по координате z :
 — $z = 3 \times 10^{-10} \text{ м}$; $z = 9 \times 10^{-10} \text{ м}$

Однако следует отметить, что в данном случае рассматриваемую среду следует отнести к метастабильной жидкости, которая обладает рядом аномальных эффектов. Так, например, вязкость среды в данном случае зависит от скорости сдвига ($\partial V_x / \partial z$) по аналогии с неньютоновскими полимерными жидкостями. Данную зависимость можно представить так:

$$\eta = \mu_0 \cdot \left| \frac{\partial V_x}{\partial z} \right|^{n-1}, \quad (21)$$

где μ_0 – коэффициент консистенции; n – показатель степени.

Таким образом, для степенной жидкости значительное влияние на распределение поля скоростей будут оказывать два параметра: μ_0 и n .

На рисунке 6 представлен объемный график при таких значениях: $n = 2,94$ и $\mu_0 = 10^6 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}^n$ (все остальные параметры такие же, как и для рисунка 4).

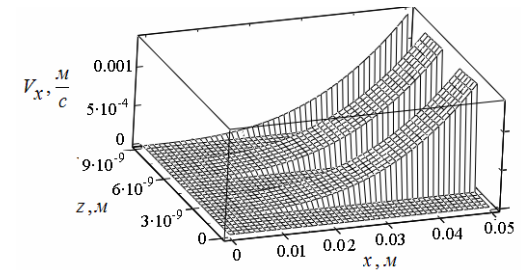


Рис. 6. Объемный график распределения скорости V_x для степенной жидкости ($n = 2,94$ и $\mu_0 = 10^6 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}^n$)

Из рисунка 6 видно, что в данном случае возникает волновой процесс по высоте слоя жидкости (вдоль оси z). Вдоль оси x также во впадинах наблюдается волновое движение, как показано на рисунке 7.

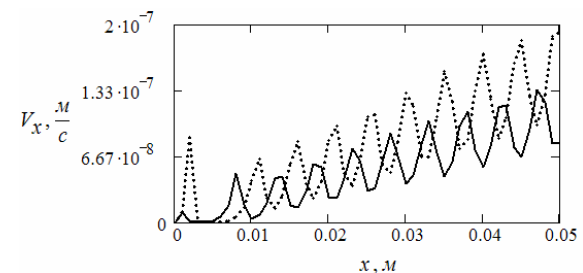


Рис. 7. Плоские графики распределения скорости V_x для степенной жидкости ($n = 2,94$ и $\mu_0 = 10^6 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}^n$) при разных значениях по координате z : — $z = 3 \times 10^{-10} \text{ м}$; $z = 9 \times 10^{-10} \text{ м}$

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что жидкая фаза электроосаждаемого никеля представляет собой степенную жидкость с коэффициентом консистенции $\mu_0 = 10^6 \cdot \text{Па} \cdot \text{с}^n$ и показателем степени $n = 2,94$. Учитывая, что значения этих параметров зависят как от природы металла, так и от условий внешнего силового воздействия в процессе его электроосаждения, жидкую фазу электроосаждаемого металла следует трактовать как степенную жидкость с определенными значениями коэффициента консистенции и показателя степени.

ВЫВОДЫ

1. Представлены дополнительные экспериментальные результаты, подтверждающие установленный эффект волнообразного течения поверхностных слоев металла, электроосаждаемого в условиях внешнего силового воздействия параллельно фронту кристаллизации.
2. Выполнено математическое моделирование процесса волнообразного течения поверхностных слоев электроосаждаемого металла при действии внешней силы параллельно фронту кристаллизации.
3. Установлено, что жидкая фаза электроосаждаемого металла представляет собой степенную жидкость с определенными значениями коэффициента консистенции и показателя степени.

Литература

1. Гирин О. Б. Волнообразное течение поверхностных слоев электроосаждаемых металлов под действием центробежной силы [Текст] / О. Б. Гирин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – № 5/5. – С. 21–25.

2. Girin O. B. Change of Density and Surface Morphology of Metals being Electrodeposited under the Action of a Centrifugal Force [Text] / O. B. Girin // *The Advanced Science Journal*. – 2011. – № 3. – Pp. 11–16.
3. Girin O. B. Phase Formation through a Stage of Liquid State in Metallic Materials being Electrodeposited: Recent Experimental Proofs [Text] / O. B. Girin // *International Journal of Material Science*. – 2012. – V. 2, № 4. – Pp. 108–118.
4. Girin O. B. Phenomenon of Precipitation of Metal Being Electrodeposited, Occurring via Formation of an Undercooled Liquid Metal Phase and its Subsequent Solidification. Part 1. Experimental Detection and Theoretical Grounding [Text] / O. B. Girin // *Materials Development and Processing*. – Weinheim : WILEY-VCH, 2000. – V. 8. – Pp. 183–188.
5. Girin O. B. Phenomenon of Precipitation of Metal Being Electrodeposited, Occurring via Formation of an Undercooled Liquid Metal Phase and its Subsequent Solidification. Part 2. Experimental Verification [Text] / O. B. Girin // *Materials Development and Processing*. – Weinheim : WILEY-VCH, 2000. – V. 8. – Pp. 189–194.
6. Bird R. B. *Dynamics of Polymeric Liquids*. V. 1. Fluid Mechanics [Text] / R. B. Bird, R. S. Armstrong, O. Hassager. – N.-Y. : Wiley, 1977. – 365 p.
7. Böhme G. *Strömungsmechanik Nicht-Newtonscher Fluids* [Text] / G. Böhme. – Stuttgart : B.G. Teubner, 1981. – 280 s.
8. Кузяев І. М. Моделювання роботи та проектування екструзійних агрегатів з розробкою елементів САПР [Текст : монографія] / І. М. Кузяев – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2008. – 474 с.
9. Лаврентьев М. А. *Методы теории функций комплексного переменного* / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
10. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* [Текст] / Э. Камке; пер. с нем. С. Ф. Фомина. – М. : Наука, 1976. – 576 с.