ISSN 2079–1836
2016, вип. 25

УДК 531.36

Ю. Н. Базилевич[1], канд. физ.-мат. наук,
И. А. Костюшко[2], канд. физ.-мат. наук

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Получена оценка области притяжения решения системы дифференциальных уравнений. В расчётные формулы кроме констант, оценивающих нелинейности, входят только собственные числа матрицы первого приближения и векторы её канонического базиса. Это позволяет использовать полученные результаты для систем уравнений довольно высокого порядка.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, устойчивость по Ляпунову, область притяжения решения, матрица, собственные числа.*

Введение. Существует ряд работ по оценке области притяжения решения системы дифференциальных уравнений [3, 4, 6]. Настоящая работа отличается отсутствием каких-либо требований о специфичности нелинейных зависимостей и ограничений на порядок системы. Полученная здесь оценка области притяжения является улучшением оценки, предложенной в [1]. Эту оценку нетрудно применить для системы уравнений высокого порядка, поскольку все вычисления здесь сводятся к определению собственных чисел и канонических базисов матриц. Такое вычисление можно осуществить с помощью хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов (например, *QR*-алгоритма и метода обратных итераций).

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ – *n*-мерный вещественный вектор, A – постоянная вещественная матрица порядка n, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x})\ F_2(\mathbf{x})\ ...\ F_n(\mathbf{x})]^{т}$ – вектор-функция, т – знак транспонирования. Считаем, что функции $F_k(\mathbf{x})$ определены в некоторой области D, содержащей начало координат. Кроме того, в области D выполняется неравенство

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \le M \cdot \|\mathbf{x}\|^{1+\alpha} , \tag{2}$$

где M и α – положительные числа; $\|\cdot\|$ – евклидова норма: $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |\mathbf{x}_k|^2$. Областью притяжения нулевого решения для данной области D (в соответствии с [2]) будем называть такую область, что все траектории, начинающиеся в её точках, существуют при $t > 0$ и стремятся к началу координат при $t \to \infty$.

Введём обозначения: $\{\lambda_i\}$ – собственные числа матрицы A, $h = -\max\limits_i \mathrm{Re}(\lambda_i)$, P – матрица, столбцами которой являются векторы канонического базиса матрицы A. В ряде случаев величина h используется как запас устойчивости системы.

Задача о получении оценки области притяжения с помощью собственных чисел и собственных векторов матрицы первого приближения поставлена В. А. Лазаряном и его сотрудниками [5].

Решение в случае матриц простой структуры. Сначала рассмотрим случай, когда матрица *A* имеет простую структуру (диагональную жорданову форму, простые элементарные делители). Это означает, что существует неособенная матрица *P*, такая что

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\,\lambda_i .$$

Сделав замену переменных $\mathbf{x} = P\mathbf{z}$ в (1), получим

$$\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z} + \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{\Phi}(\mathbf{z}) = P^{-1}\mathbf{F}(P\mathbf{z})$. Для функции $\mathbf{\Phi}(\mathbf{z})$ выполняется неравенство

$$\left\|\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{z})\right\| \le N \cdot \left\|\mathbf{z}\right\|^{1+\alpha}, \tag{4}$$

аналогичное неравенству (2). Действительно: $\left\|\hat{\mathbf{O}}(\mathbf{z})\right\| \le \left\|P^{-1}\right\| \cdot \left\|\mathbf{F}(P\mathbf{z})\right\| \le$ $\le \left\|P^{-1}\right\| \cdot M \cdot \left\|P\mathbf{z}\right\|^{1+\alpha} \le \left\|P^{-1}\right\| \cdot M \cdot \left\|P\right\|^{1+\alpha} \left\|\mathbf{z}\right\|^{1+\alpha}$. Поэтому $N \le \left\|P^{-1}\right\| \cdot M \times \left\|P\right\|^{1+\alpha}$. Здесь в качестве матричной нормы нужно использовать матричную норму, согласованную с векторной нормой. В данном случае это «спектральная» норма матрицы [8], т.е. наибольшее из её сингулярных чисел (обобщённых собственных чисел).

Матрица B диагональная. Следовательно, уравнения (3) можно записать в виде

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \Phi_i(\mathbf{z}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

В качестве функции Ляпунова будем использовать функцию

$$V(\mathbf{x}) = \left\|\mathbf{z}\right\|^2 = \mathbf{z}^*\mathbf{z} = \mathbf{x}^*\left(P^{-1}\right)^* P^{-1}\mathbf{x}\ ,$$

где звездочка – знак эрмитового сопряжения. Функция $V(\mathbf{x})$ – квадратичная форма с вещественными коэффициентами.

Вычислим производную одного слагаемого функции $V(\mathbf{x})$ с учётом (5)

$$\tfrac{d}{dt}(\bar{z}_i z_i) = \dot{\bar{z}}_i z_i + \bar{z}_i \dot{z}_i = (\bar{\lambda}_i \bar{z}_i + \bar{\Phi}_i(\mathbf{z}))z_i + \bar{z}_i(\lambda_i z_i + \Phi_i(\mathbf{z})) =$$
$$= 2\,\mathrm{Re}(\lambda_i)\left|z_i\right|^2 + \bar{\Phi}_i(\mathbf{z})z_i + \Phi_i(\mathbf{z})\bar{z}_i \,\textbf{.}$$

Считаем, что выполняются условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и, следовательно, $h > 0$. Просуммировав вычисленные производные, получаем

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(2\,\mathrm{Re}(\lambda_i)\left|z_i\right|^2 + \bar{\Phi}_i(\mathbf{z})z_i + \Phi_i(\mathbf{z})\bar{z}_i) \le$$
$$\le -2h\left\|\mathbf{z}\right\|^2 + \left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle + \left\langle \mathbf{\Phi}(\mathbf{z}), \mathbf{z}\right\rangle.$$

Здесь $\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$ – скалярное произведение.

Рассмотрим последние два слагаемых

$$\left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle + \left\langle \mathbf{\Phi}(\mathbf{z}), \mathbf{z}\right\rangle = \left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle + \overline{\left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle} = 2\,\mathrm{Re}(\left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle)$$
$$\le 2\left|\mathrm{Re}(\left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle)\right| \le 2\left|\left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle\right|.$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского и неравенством (4).

$$\left|\left\langle \mathbf{z}, \mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\rangle\right| \le \left\|\mathbf{z}\right\| \cdot \left\|\mathbf{\Phi}(\mathbf{z})\right\| \le \left\|\mathbf{z}\right\| \cdot N \cdot \left\|\mathbf{z}\right\|^{1+\alpha} = N \cdot \left\|\mathbf{z}\right\|^{2+\alpha}.$$

Далее получаем:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \le -2h\left\|\mathbf{z}\right\|^2 + 2N\left\|\mathbf{z}\right\|^{2/\alpha} = -2\left(h - N\left\|\mathbf{z}\right\|^{\alpha}\right)\left\|\mathbf{z}\right\|^2$$
$$= -2(h - N\left\|\mathbf{z}\right\|^{\alpha})V(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Условие леммы Ляпунова об асимптотической устойчивости выполняется, когда выражение в скобках положительно, то есть $h - N\left\|\mathbf{z}\right\|^{\alpha} > 0$ или

$$\left\|\mathbf{z}\right\|^2 < \left(\frac{h}{N}\right)^{2/\alpha}. \tag{7}$$

Полученный результат можно сформулировать так: если для системы уравнений (1) выполняются условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению и область D определения функций достаточно велика, то любое решение системы (1) с начальными условиями $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, удовлетворяющими неравенству

$$\mathbf{x}_0^*\left(P^{-1}\right)^* P^{-1}\mathbf{x}_0 < \left(\frac{h}{\left\|P^{-1}\right\| \cdot M \cdot \left\|P\right\|^{1+\alpha}}\right)^{2/\alpha}, \tag{8}$$

стремится к нулю. Здесь P – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A; M и α – константы неравенства (2).

Правая часть неравенства (8) в $n^{2/\alpha}$ раз больше, чем дает аналогичная формула в [1].

Общий случай. Рассматриваем матрицу произвольной структуры, т.е. такую, что её жорданова форма может быть не диагональная.

В этом случае для приведения к жордановой форме матрица преобразования P составляется из собственных и присоединенных векторов. Собственные векторы определятся из равенства $A\mathbf{b}_k^{(0)} = \lambda_k \mathbf{b}_k^{(0)}$, а соответствующие присоединенные векторы – из равенств

$$A\mathbf{b}_k^{(j)} = \lambda_k \mathbf{b}_k^{(j)} + \mathbf{b}_k^{(j-1)}, \quad j = \overline{1, m_k}, \tag{9}$$

где $m_k + 1$ – размерность k-го жорданового блока.

В [7] указано на возможность использования вместо обычных жордановых блоков следующих

$$G_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix},$$

где δ – достаточно малое положительное число. В этом случае вместо равенства (9) используется следующее:

$$A\mathbf{b}_k^{(j)} = \lambda_k \mathbf{b}_k^{(j)} + \delta \mathbf{b}_k^{(j-1)}, \quad j = \overline{1, m_k}.$$

Очередному блоку соответствует подсистема

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \lambda_k \mathbf{z}_k + \delta \mathbf{z}_{k+1} + \Phi_k(\mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+1} = \lambda_k \mathbf{z}_{k+1} + \delta \mathbf{z}_{k+2} + \Phi_{k+1}(\mathbf{z}), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dot{\mathbf{z}}_{k+m_k} = \lambda_k \mathbf{z}_{k+m_k} + \Phi_{k+m_k}(\mathbf{z}). \end{cases}$$

Поэтому в неравенство (6) добавляется слагаемое $2\delta \|\mathbf{z}\|^2$, и оценка (8) меняется на следующую

$$\mathbf{x}_0^* \left(P^{-1}\right)^* P^{-1} \mathbf{x}_0 < \left(\frac{h - \delta}{\|P^{-1}\| \cdot M \cdot \|P\|^{1+\alpha}} \right)^{2/\alpha},$$

что также является улучшением оценки, полученной в [1]. Полученную область обозначим G.

Понятно, что величину δ нужно выбирать из условия $\delta < h$. Вопрос о наилучшем выборе этой величины требует отдельного изучения.

Если область G больше области определения нелинейных функций D, то для оценки области притяжения, согласно [2], нужно найти минимум l функции $V(\mathbf{x})$ на границе области $\sigma = G \bigcap D$; искомой областью является множество, определяемое неравенством $V(\mathbf{x}) < l$.

Замечание. Результаты без изменения переносятся и на неавтономную систему уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{z})$.

Пример.

$$\ddot{s} + 2H\dot{s} + s - 2bs^3 = 0; \;\; b > 0; \;\; 1 > H > 0. \tag{10}$$

Таким уравнением описывается движение материальной точки под действием силы тяжести по направляющей, изображенной на рис. 1, при наличии вязкого трения. Направляющая описывается уравнением

$$y = \frac{1}{2g}\left(s^2 - bs^4\right),$$

где s – длина дуги кривой. Считаем, что масса материальной точки $m = 1$, а величина вязкого трения определяется по формуле $P_{\text{ñî ï ð.}} = -2H\dot{s}$.

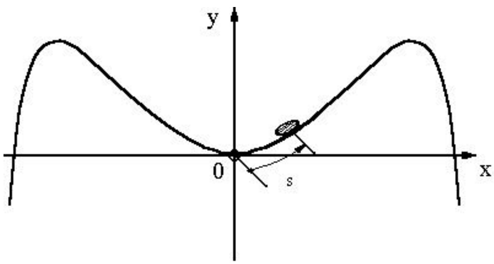

Рис. 1. **Пример механической системы**

Приведем уравнение (1) к нормальной форме Коши, положив $x_1 = s; \quad x_2 = \dot{s}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2Hx_2 + 2bx_1^3. \end{cases} \tag{11}$$

Отсюда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2H \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2bx_1^3 \end{pmatrix}; \quad \left\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\right\| \le 2b\left\|\mathbf{x}\right\|^{1+2}.$$

Находим собственные числа матрицы A: $\lambda_{1,2} = -H \pm iv$, где $v^2 = 1 - H^2$. Поэтому $h = -\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = H$. Составляем матрицу P из собственных векторов матрицы A и вычисляем P^{-1}:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -H+iv & -H-iv \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{2v}\begin{pmatrix} v-Hi & -i \\ v+Hi & i \end{pmatrix}.$$

Далее пользуемся формулой (8). Вычисляем вектор $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{x}$. Получаем: $\mathbf{z} = \frac{1}{2v}\begin{pmatrix} (v-Hi)x_1 - ix_2 \\ (v+Hi)x_1 + ix_2 \end{pmatrix}$. Отсюда левая часть неравенства равна: $\mathbf{x}_0^*\left(P^{-1}\right)^* P^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{z}^*\mathbf{z} = \frac{1}{2v^2}(x_1^2 + 2Hx_1x_2 + x_2^2)$.

Спектральная норма матрицы P – это наибольшее из её сингулярных чисел, которыми являются квадратные корни собственных чисел матрицы P^*P. Вычисляем: $P^*P = \begin{pmatrix} 2 & 2H^2 + 2Hvi \\ 2H^2 - 2Hvi & 2 \end{pmatrix}$. Собственные числа этой матрицы равны: $\mu_{1,2} = 2 \pm 2H$. Отсюда: $\|P\| = \sqrt{2(1+\mathrm{H})}$. Таким же путём находим $\left\|P^{-1}\right\| = \frac{\sqrt{1+H}}{\sqrt{2}\, v}$. Подставив эти величины в (8), получаем:

$$x_1^2 + 2Hx_1x_2 + x_2^2 < \frac{Hv^3}{2b(1+H)^2}.$$

На рис. 2 изображена область *G* для случая *H* = 0,5; b = 1. Уравнение границы области в этом случае имеет вид:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 < 0{,}0722.$$

Из физических соображений ясно, что при нулевой начальной скорости $\dot{s}(0) = 0$ затухание колебаний будет обеспечено в случае, когда начальное положение $s(0)$ материальной точки будет между максимальными значениями функции $y = \frac{1}{2g}\left(s^2 - bs^4\right)$ (рис. 1), т. е. когда будет выполняться неравенство:

$$s(0) < \frac{1}{\sqrt{2b}}. \qquad (12)$$

Крестиками на рис. 2 обозначены границы значений $s(0)$ из неравенства (12).

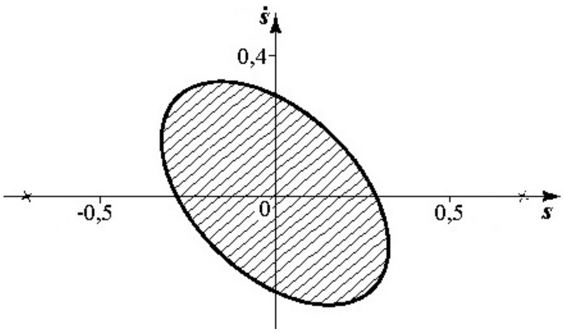

Рис. 2. **Результаты решения примера**

Выводы. Полученная оценка представляет собой внутренность эллипсоида в n-мерном фазовом пространстве. Для вычисления уравнения эллипсоида используются константы из оценки вектор-функции нелинейных зависимостей (2), а также собственные числа и векторы канонического базиса матрицы первого приближения. По сравнению с предыдущим результатом [1] длины полуосей эллипсоида увеличены в $n^{1/\alpha}$ раз. Здесь n – порядок системы уравнений, α – константа неравенства (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Базилевич Ю. Н.*** Оценка области притяжения решения уравнений движения с помощью собственных чисел / Ю. Н. Базилевич // Колебания и динамические качества механических систем. – Киев: Наук. думка. – 1983. – С. 14–17.

2. ***Барбашин Е. А.*** Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

3. ***Баркин А. И.*** Вычисление области притяжения для систем с полиномиальной правой частью / А. И. Баркин // Труды ИСА РАН. – 2013 – 63, № 2. – С. 99–102.

4. **Вербицкий В. Г.** Анализ устойчивости и маневренности движения модели седельного автопоезда с системой управления опорной осью полуприцепа / В. Г. Вербицкий, А. Д. Бумага // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2008 – **4,** № 2. – С. 65–76.

5. ***Лазарян В. А.*** Устойчивость движения рельсовых экипажей / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. – Киев: Наук. думка, 1972. – 199 с.

6. ***Матросов В. М.*** Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем / В. М. Матросов, З. И. Козлов, Н. И. Матросова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. –184 с.

7. ***Петровский И. Г.*** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский– М.: Наука, 1970. – 279 с.

8. ***Horn, R. A.*** Matrix analysis / R. A. Horn, Ch. R. Johnson. – New York: Cambridge University Press, 1990. – 662 p. (Русский перевод: **Хорн Р.** Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.)

Ю. М. Базилевич, канд. фіз.-мат. наук,
І. А. Костюшко, канд. фіз.-мат. наук

ОЦІНКА ОБЛАСТІ ТЯЖІННЯ РІШЕННЯ У РАЗІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Отримана нова оцінка області тяжіння рішення системи диференціальних рівнянь. В розрахункові формули крім констант, які оцінюють нелінійності, входять тільки власні числа матриці першого наближення і вектори її канонічного базису. Це дозволяє використовувати отримані результати для систем рівнянь досить високого порядку.

Ключові слова: *диференціальні рівняння, стійкість по Ляпунову, область тяжіння рішення, матриця, власні числа.*

Yu. N. Bazilevich, PhD (Phis.-Math.), I. A. Kostushko, PhD (Phis.-Math.)

ESTIMATION OF THE DOMAIN OF SOLUTION ATTRACTION IN CASE OF HIGH ORDER EQUATION SYSTEM

We obtain a new estimation of the domain of attraction for the solution of differential equation system. The calculation formulas in addition to constants estimating nonlinearity include only the eigenvalues of the first approximation matrix and its canonical basis vectors. This allows you to use the obtained results for systems of equations of quite higher order.

Keywords: *differential equations, Lyapunov's stability, domain of solution attraction, matrix, eigenvalues.*

We consider a system of equations

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \tag{1}$$

where $\mathbf{x}$ is *n*-dimensional real vector, A is constant real matrix of order *n*, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x})\ F_2(\mathbf{x})\ \ldots\ F_n(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$ is a vector function. There is satisfied the inequality

$$\left\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\right\| \le M \cdot \left\|\mathbf{x}\right\|^{1+\alpha} , \tag{2}$$

where M and α – positive numbers; $\|\cdot\|$ – Euclidean norm: $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |\mathbf{x}_k|^2$.

Let us use the canonical form of matrices, which differs from the ordinary Jordan form by the following type of Jordan blocks:

$$G_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & \delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{bmatrix},$$

where δ is sufficiently small positive number.

Let us introduce the following notations: $\{\lambda_i\}$ are the eigenvalues of matrix A, $h = -\max_i \mathrm{Re}(\lambda_i)$, P is a matrix whose columns are the vectors of the canonical basis of the matrix A.

It was found that if the system of equations (1) satisfies the conditions of Lyapunov's theorem on stability in the first approximation, then any solution of system (1) with the initial conditions $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, that satisfies the inequality

$$\mathbf{x}_0^* \left(P^{-1}\right)^* P^{-1}\mathbf{x}_0 < \left(\frac{h-\delta}{\left\|P^{-1}\right\| \cdot M \cdot \left\|P\right\|^{1+\alpha}} \right)^{2/\alpha},$$

tends to zero.

The boundary of the corresponding set is an ellipsoid in *n*-dimensional space.

REFERENCES

1. ***Bazilevich Yu. N.*** Evaluation of the domain of attraction of the solution of motion equations using the eigenvalues / Yu. N. Bazilevich // Vibrations and dynamic properties of mechanical systems. – Kiev: Naukova dumka. – 1983. – P. 14–17. (in Russian).

2. ***Barbashin E. A.*** Lyapunov's functions / E. A. Barbashin. – M.: Nauka, 1970 – 240 p. (in Russian).

3. ***Barkin A. I.*** Calculation of the domain of attraction for systems with polynomial right-hand side / A. I. Barkin // Proceedings of ISA RAS. – 2013 – 63, No 2. – P. 99–102. (in Russian).

4. ***Verbitsky V. G.*** Analysis of stability and maneuverability of motion of tractor train model with controlling system of supporting axis of the semi-trailer / V. G. Verbitsky, A. D. Bumaga // Modern industrial and civil construction. – 2008 – 4, No 2. – P. 65–76. (in Russian).

5. **Lazary*an V. A.*** Dynamics stability of rail-tracked vehicles / V. A. Lazaryan, L. A. Dlugach, M. L. Korotenko. – Kiev: Naukova dumka, 1972. – 199 p. (in Russian).

6. ***Matrosov V. M.*** Theory of stability of multivariable nonlinear systems / V. M. Matrosov, Z.I. Kozlov, N. I. Matrosov. – M.: FIZMATLIT, 2007. –184 p. (in Russian).

7. ***Petrovsky I. G.*** Lectures on the theory of ordinary differential equations / I. G. Petrovskiy – M.:Nauka, 1970. – 279 p. (There exist translation of the book into English: ***Petrovskii I. G.*** Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations. Foreign Technology Div Wright-Patterson AFB, Ohio, 1973).

8. ***Horn, R. A.*** Matrix analysis / R. A. Horn, Ch. R. Johnson. – New York: Cambridge University Press, 1990. – 662 p.

[1]*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры*
Днепр, Украина,

[2]*Запорожский Национальный университет*
Запорожье, Украина

Поступила в редколлегию 25.07.2016