

Точная декомпозиция линейных систем

Базилевич Ю.Н. (bazilevich@ua.fm)

Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Днепрпетровск

Изложены вопросы приведения больших систем уравнений к отдельным подсистемам путем линейной замены переменных. С использованием идей, изложенных в монографии автора [1], развиваются методы приведения квадратных матриц к блочно-треугольному виду. Уделено внимание вычислительной стороне применяемых методов, возможности получения решения с помощью ЭВМ.

Рассматриваются методы, позволяющие либо привести данную систему уравнений к нескольким подсистемам, либо установить, что при выбранном классе преобразований такое приведение невозможно. Поэтому используется термин «точная декомпозиция», чтобы показать отличие от тех работ, в которых рассматривается приближенная декомпозиция на блоки, соответствующие «быстрым» и «медленным» движениям, или на блоки, соответствующие слабо связанным подсистемам. Возможность или невозможность расщепления уравнений зависит от свойств исследуемой физической системы, точнее, от свойств соответствующей расчетной схемы.

1. Примеры некоторых задач, связанных с проблемой декомпозиции

Одним из источников задач декомпозиции стали вопросы упрощения уравнений, предназначенных для исследования устойчивости движения рельсовых экипажей. Задачи механики железнодорожного транспорта можно схематично разделить на три направления: продольная динамика поезда, взаимодействие подвижного состава и пути, устойчивость движения рельсовых экипажей [2, 3 гл. XVI]. Последнее приводит к необходимости учитывать большое число степеней свободы, а также принимать во внимание силы псевдоскольжения (силы крипа), обусловленные взаимодействием колёсных пар и рельсовой колеи. Эти силы не являются малыми, именно они определяют устойчивость движения экипажа.

Природа сил крипа заключается в следующем. Железнодорожные колёса жёстко насажены на ось (рис. 1). Профиль колёс таков, что при малых колебаниях они имеют небольшую коничность в точке контакта с рельсом. Движение колёсных пар, объединённых в тележки, сопровождается псевдоскольжением, при котором фактические перемещения колеса не совпадают с кинематическими перемещениями. Это происходит вследствие местных деформаций в зоне контакта колеса и рельса в том случае, когда касательная сила взаимодействия P меньше силы сцепления. При не очень больших значениях силы P её считают пропорциональной относительно упругому проскальзыванию:

$$P = -F\varepsilon,$$

где F — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом псевдоскольжения, ε — относительное упругое проскальзывание. В результате на колёсную пару действуют обобщенные силы [2]:

$$\begin{aligned} Q_y &= f_1 \psi - h_1 v^{-1} \dot{y}, \\ Q_\psi &= -f_2 y - h_2 v^{-1} \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Здесь y и ψ — соответственно боковой относ и угол виляния (поворота вокруг вертикальной оси) колёсной пары, Q_y и Q_ψ — обобщённые силы, соответствующие переменным y и ψ , v — скорость поступательного движения рельсового экипажа, f_1 , h_1 , f_2 , h_2 — положительные коэффициенты, точка означает производную по времени.



Рис.1. Колёсная пара и рельсовая колея

Вторые слагаемые в выражениях сил псевдоскольжения аналогичны силам вязкого трения. Они оказывают стабилизирующее влияние на колебания. Поскольку скорость стоит в знаменателе, величина этих слагаемых уменьшается с увеличением скорости движения экипажа. Первые же слагаемые, наоборот, раскачивают систему. Более того, наличие несимметричных слагаемых делает неприменимыми для исследования таких систем многие традиционные методы теории колебаний. Такие системы не приводятся к главным координатам даже при отсутствии демпфирования. Для них «не работают» известные теоремы качественного исследования.

Неустойчивость прямолинейного движения рельсовых экипажей не приводит к авариям благодаря гребням колёс. Однако возникающие при этом автоколебания приводят к повышенному износу подвижного состава и пути, отрицательно влияют на сохранность грузов и комфорт пассажиров.

Несимметрические матрицы коэффициентов встечаются, например, при исследовании устойчивости движения различных динамических систем [4, 5]. Это связано не только с явлением крива, а и с такими известными проблемами, как шимми колес автомобиля или переднего шасси самолета, флаттер, и т. п.

Когда на катящееся автомобильное колесо действует боковая сила, оно испытывает упругую деформацию (рис. 2). Колесо при этом отклоняется, не меняя своего направления. Но последовательность площадок контакта располагается уже в другом направлении. Иначе говоря, колесо катится «криво» в направлении, образующем угол увода ϵ с геометрической плоскостью недеформированного колеса [4, стр. 96, 113].

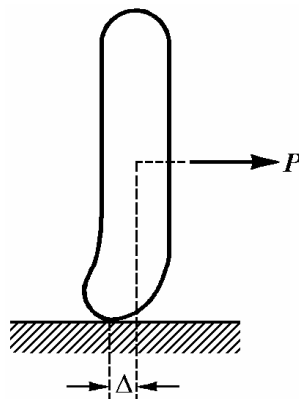


Рис.2. Боковая сила, действующая на автомобильное колесо

Гипотеза «увода» заключается в том, что угол увода ε считается пропорциональным боковому смещению Δ , которое в свою очередь пропорционально боковой силе P :

$$\varepsilon = \beta \Delta, P = -H \Delta,$$

где H — жёсткость колеса в горизонтальном поперечном направлении, β — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом увода. В таких задачах матрицы коэффициентов несимметрические, но число степеней свободы, как правило, меньше, чем в уравнениях движения железнодорожных экипажей.

Уравнения возмущённого движения механической системы могут быть представлены в следующем виде:

$$B_1 \ddot{\mathbf{q}} + B_2 \dot{\mathbf{q}} + B_3 \mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где B_1, B_2 и B_3 — комплексные (вообще говоря) матрицы коэффициентов; \mathbf{q} — вектор обобщенных координат. Задача декомпозиции заключается в приведении матриц B_i к блочно-диагональному или (хотя бы) к блочно-треугольному виду.

Аналогичные задачи возникают и при анализе экономических систем [6]. Так, динамическая модель Леонтьева может быть записана в виде [7]:

$$\mathbf{x} = A \mathbf{x} + K \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}, \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор выпуска, характеризующий выпуск продуктов за год по отраслям; A — матрица прямых затрат (т.е. коэффициенты пропорциональности между выпуском и промежуточным потреблением); $K = K_0 (E - A)$; K_0 — матрица коэффициентов полной приростной капиталоемкости (т.е. коэффициенты пропорциональности между скоростями прироста конечных продуктов и соответствующими инвестициями); E — единичная матрица; $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ — вектор потребления; τ — знак транспонирования. Рассматривается задача нахождения преобразования переменных, позволяющего разделить уравнения (2) на несколько независимых подсистем. Если это возможно, то полученные подсистемы описывают некоторые «комплексы» видов продукции. Каждый из них можно анализировать отдельно от других. О симметрии исходных матриц A и K вообще речь не идёт.

В настоящей работе считаем, что матрицы коэффициентов могут быть несимметрическими и, вообще, произвольными. Далее будет показано что, применяя методы декомпозиции к системам с произвольными матрицами коэффициентов, мы сталкиваемся с некомпактными группами симметрии, неполупростыми алгебрами и вынуждены привлекать довольно глубокие результаты общей алгебры.

2. Задачи приведения матриц

Рассматриваем задачу о приведении комплексных (вообще говоря) матриц B_i ($i = \overline{1, g}$) порядка n . Нужно найти преобразование подобия

$$\tilde{B}_i = S^{-1} B_i S = \text{diag}(B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{lj}) = \begin{bmatrix} [1] & & & 0 \\ & [2] & & \\ 0 & & \dots & \\ & & & [l] \end{bmatrix},$$

приводящее все матрицы коэффициентов к одинаковому блочно-диагональному виду, или доказать, что такого преобразования не существует.

Вторая задача аналогична первой, но матрицы приводятся к блочно-треугольному виду:

$$\begin{bmatrix} [1] & & & & \\ & [2] & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & [m] \end{bmatrix}$$

В обоих случаях требуется получить наилучшее приведение, т.е. выбрать такие матрицы преобразования S , при которых максимальный из порядков диагональных блоков будет минимально возможным.

Следует заметить, что готовое решение этих задач есть только для случая одной матрицы ($g = 1$). Одну матрицу можно привести к её жордановой форме. Создание канонической формы для пары матриц — это знаменитая нерешённая задача. Эту задачу и эквивалентные ей называют дикими задачами [8].

3. Алгебра

Далее используется понятие «алгебра». Слово алгебра имеет три значения: наука алгебра, алгебра над кольцом (линейная алгебра, алгебра) и универсальная алгебра (алгебра). Нас интересует алгебра над кольцом [9, 10]. В качестве кольца используется множество C комплексных чисел. В этом случае определение следующее: если ассоциативное кольцо A одновременно является линейным пространством над C , удовлетворяющим условию

$$(\alpha a)\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}b) = \alpha(\mathbf{a}b), \text{ где } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A, \alpha \in C,$$

то A называется алгеброй над C .

Более короткое определение: алгеброй называется линейное пространство с заданным на нём билинейным ассоциативным умножением.

Следует обратить внимание, что в настоящей работе рассматриваются алгебры, не обязательно содержащие единицу.

Множество $\Lambda(B_i)$ всех матриц, коммутирующих с данными матрицами $\{B_i\}$, является алгеброй. Эту алгебру называют *централизатором* матриц $\{B_i\}$. Далее будет рассматриваться также *алгебра с единицей* $\Phi(B_i)$, порожденная матрицами $\{B_i\}$. Эта алгебра является линейной оболочкой единичной матрицы, матриц $\{B_i\}$ и всех их конечных произведений $B_1^2, B_1B_2, \dots, B_1^3, \dots$

Алгебры $\Lambda(B_i)$ и $\Phi(B_i)$, точнее говоря их базисы, могут быть вычислены на ЭВМ [1, 11].

4. Блочно-диагональный вид

Для приведения матриц $\{B_i\}$ к блочно-диагональному виду используется метод коммутирующей матрицы: из централизатора $\Lambda(B_i)$ матриц B_j выбираем матрицу T , имеющую хотя бы два различных собственных числа. Векторы ее канонического базиса являются столбцами искомой матрицы преобразования подобия. Этот способ последовательно применяется сначала к исходным матрицам B_k , затем к получающимся блокам. Окончание — нахождение нерасщепляющихся блоков. На первом шаге желательно применение методов, использующих априорную информацию о симметрии соответствующей физической системы. Таким путем осуществляется приведение к

блокам минимально возможных порядков. Дальнейшее уменьшение порядков блоков невозможно. Об этом свидетельствует теорема единственности [12].

Указанный метод многократно применялся для анализа математических моделей рельсовых экипажей и экипажей на магнитном подвешивании [1]. Расчёты показали, что в традиционных математических моделях декомпозиция, выполненная на интуитивном уровне, уже является наилучшей. Дальнейшее уменьшение блоков невозможно. Однако для новых расчётных схем получены содержательные результаты.

5. Блочно-треугольный вид. Иерархическая декомпозиция

Приведение матриц к блочно-треугольному виду соответствует иерархической декомпозиции [13]. Ранее использовались также термины вертикальная, последовательная декомпозиция, агрегирование.

При иерархической декомпозиции первая из подсистем не содержит “чужих” переменных, в следующую подсистему кроме “своих” переменные войдут переменные предыдущей подсистемы и т. д. Число таких подсистем может быть большим, чем при обычной декомпозиции.

Подсистемы меньшего порядка, составленные из диагональных блоков преобразованных матриц, эквивалентны исходной системе уравнений с точки зрения устойчивости движения. Это объясняется тем, что множество собственных чисел исходной системы уравнений является объединением множеств собственных чисел подсистем, составленных из диагональных блоков.

Доказано [1], что только при несимметрических матрицах коэффициентов число вспомогательных подсистем может быть больше, чем максимально возможное число независимых подсистем, к которым приводится данная система уравнений.

Примеры систем с несимметрическими матрицами коэффициентов приведены выше.

Итак, рассматриваются матрицы B_i ($i = \overline{1, g}$), которые не приводятся одновременно к блочно-диагональному виду (если бы приводились — то мы бы это уже сделали с помощью метода коммутирующей матрицы). Требуется выяснить: возможно ли их приведение к блочно-треугольному виду?

Первый шаг метода — построение алгебры с единицей $\varphi(B_i)$, порожденной данными матрицами (см. выше). Критерий возможности приведения матриц к блочно-треугольному виду (приводимости алгебры): размерность (ранг) алгебры меньше чем n^2 , где n — порядок матриц [14].

Теорема 1. Если для данных матриц $\{B_i\}$ ранг r алгебры $\varphi(B_i)$ меньше чем n^2 и централизатор $\Lambda(B_i)$ не содержит ни одной матрицы T с различными собственными числами, то алгебра $\varphi(B_i)$ неполупростая.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Условие $r < n^2$ означает, что алгебра $\varphi(B_i)$ приводима [9, 10]. Приводимая алгебра может быть полупростой или неполупростой. Допустим, что она полупростая. В этом случае матрицы алгебры (в том числе и $\{B_i\}$) могут быть приведены к блочно-диагональному виду. Тогда множество $\Lambda(B_i)$ содержит матрицы с различными собственными числами, что противоречит условию теоремы. Остаётся второй случай — неполупростая алгебра. ■

Неполупростая алгебра имеет нетривиальный радикал. Для его нахождения есть расчетные формулы [10]: координаты $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T$ любого элемента радикала в этом базисе удовлетворяют уравнению

$$D\alpha = 0, D = \{d_{ij}\}, \quad (3)$$

где $d_{ij} = \text{Sp}(W_i W_j)$, Sp – след матрицы, $\{W_i\}$ – базис алгебры. Общее решение уравнений (3) можно найти с помощью программы SLAU5 [1]. Следовательно, можно получить базис радикала.

Назовём Z -множеством пересечение всех ядер элементов радикала алгебры $\varphi(B_i)$. Другими словами — это множество, обращаемое в нуль всеми матрицами радикала.

Теорема 2. Z -множество является подпространством пространства C^n .

Доказательство. Это множество может быть найдено с использованием не всех матриц радикала, а только элементов базиса. Вычисление соответствует нахождению решения системы линейных однородных алгебраических уравнений. Общее решение такой системы, как известно, является подпространством. ■

Теорема 3. Если алгебра неполупростая, то Z -множество является нетривиальным подпространством.

Доказательство. Ненулевой радикал матричной алгебры представляет собой семейство матриц $G(\tau)$, где τ — вектор параметров. Радикал является нильпотентной подалгеброй, поскольку все его элементы нильпотентны (см. [10, § 7, теорема 2]). Следовательно, $\exists k \geq 1: G^k(\tau) \neq 0, G^{k+1}(\tau) = 0$. Пусть G_1 — ненулевая матрица из множества $G^k(\tau)$, а ξ_1 — ее ненулевой столбец. Тогда $G(\tau)\xi_1 = 0 \quad \forall \tau$, поскольку $G(\tau)(G^k(\tau)) = 0$. Итак, уравнение $G(\tau)\xi = 0$ имеет ненулевые решения. ■

Теорема 4. Z -множество является инвариантным подпространством относительно матриц $\{B_i\}$.

Доказательство. Радикал $G(\tau)$ алгебры $\varphi(B_i)$ является её идеалом. Матрицы B_v принадлежат алгебре $\varphi(B_v)$. Поэтому $\forall \tau_1: G(\tau_1)B_v \in \{G(\tau)\}$. Отсюда получаем $G(\tau_1)B_v\xi = G(\tau_2)\xi = 0 \quad \forall \tau_1$, где $\xi \in Z = \{\xi: G(\tau)\xi = 0, \forall \tau\}$, т.е. Z -множество инвариантно относительно матриц $\{B_i\}$. ■

Искомую матрицу преобразования S формируем из векторов базисов этого подпространства и ортогонального дополнения к нему, располагая векторы в качестве столбцов.

6. Расширение класса преобразований при иерархической декомпозиции

Для преобразования системы уравнений (1) можно использовать не только преобразование подобия. При замене переменных $x = Sy$ матрицы $\{B_i\}$ умножаются на матрицу S справа. Здесь S — неособенная матрица преобразования, y — вектор новых переменных. Можно делать также невырожденные преобразования уравнений: умножение на число, не равное нулю, прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число, и т.п. Такие преобразования соответствуют умножению матриц на некоторую неособенную матрицу H слева. Возникает задача о наилучшем приведении матриц $\{B_i\}$ к блочно-треугольному виду с помощью преобразования

$$\hat{B}_i = HB_iS, \quad i = \overline{1, g}.$$

Доказано следующее [1, глава 7]: если матрица B_1 неособенная, то для решения задачи достаточно составить вспомогательные матрицы $C_i = B_1^{-1}B_i, i = \overline{1, g}$, и для них решить аналогичную задачу, используя лишь преобразование подобия.

7. Результаты расчётов

Составлены вычислительные алгоритмы и компьютерные программы по реализации разработанного метода [11]. Проведен анализ математических моделей

рельсовых экипажей, предназначенных для исследования устойчивости их невозмущенного движения. Расчёты показали, что для всех рассмотренных систем иерархической декомпозиции не даёт дополнительного улучшения после приведения матриц к блочно-диагональному виду. Тем не менее, разработанный метод следует иметь «на вооружении». Это подтверждает также пример, рассмотренный ниже.

8. Пример системы, имеющей некомпактную группу симметрии

Рассмотрим механическую систему [15], состоящую из двух тел (рис. 3). Пусть устройство управления создаёт силу $P = -x_1$, приложенную ко второму телу. Это пример позиционной неконсервативной силы. Пусть $m_1 = m_2 = 1$, $k = 1$.

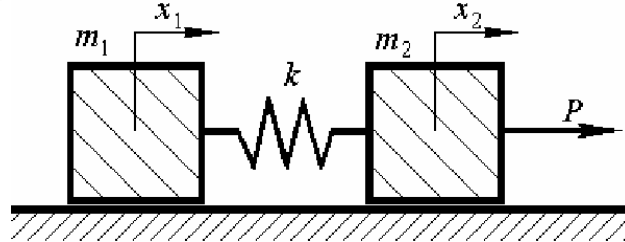


Рис. 3. Пример колебательной системы

Выберем следующие обобщённые координаты: q_1 — перемещение центра масс всей системы; q_2 — половина сжатия пружины: $q_1 = (x_1 + x_2) / 2$, $q_2 = (x_1 - x_2) / 2$.

Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\ddot{q}_1 + q_1 + q_2 &= 0, \\ 2\ddot{q}_2 - q_1 + 3q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Матрицы коэффициентов следующие: $B_1 = 2E$, $B_2 = 0$, $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Вспомогательные матрицы таковы: $C_1 = E$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Сначала, мы удостоверимся, что невозможно привести данную систему к блочно-диагональному виду. Для этого найдем матрицу T , коммутирующую с матрицами C_i ($i = 1, 2, 3$). В результате вычислений получаем: $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$, где α, β — произвольные параметры. Поскольку матрица T не имеет различных собственных значений, приведение исходных матриц $\{C_i\}$ к блочно-диагональному виду невозможно (раздел 4).

Чтобы выяснить: выполнимо ли приведение матриц $\{C_i\}$ к блочно-треугольному виду, мы будем использовать алгоритм, описанный в разделе 5.

Вычисляем все возможные произведения $C_k C_j$ матриц и проверяем: являются ли полученные матрицы линейной комбинацией исходных матриц. Поскольку умножение на $C_1 = E$ не изменяет матрицы, то остается рассмотреть произведение C_3^2 . Вычисляем $C_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Проверяем, является ли эта матрица линейной комбинацией предыдущих матриц: $C_3^2 = \alpha C_1 + \beta C_2$? Это равенство соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0,5, \\ 1 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0,5, \\ -1 = \alpha \cdot 0 - \beta \cdot 0,5, \\ 2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1,5. \end{cases} \quad (4)$$

Получаем что $\alpha = -1, \beta = 2$. Следовательно, матрица C_3^2 — линейная комбинация матриц C_1 и C_3 . В противном случае, система (4) не имела бы решений.

Все произведения принадлежали линейной оболочке матриц C_1 и C_3 . Следовательно, эти матрицы формируют базис алгебры $\phi(C_i)$, порождённой матрицами $\{C_i\}$. Число r элементов базиса равняется 2, т.е. $r < n^2 \equiv 2^2$. Это означает, что приведение к треугольной форме возможно.

Вычисляем матрицу $D = \{Sp(C_j C_k)\}$. Все произведения $C_j C_k$ уже рассчитаны. Имеем: $D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Систему уравнений $Dy = 0$ приобретает вид: $2y_1 + 2y_2 = 0, 2y_1 + 2y_2 = 0$.

В результате мы получаем: $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Вычисляем матрицу G :

$$G = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot 1.5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $G\xi = 0$ имеет такой вид: $\xi_1 - \xi_2 = 0, \xi_1 - \xi_2 = 0$.

Мы получили, что базис во множестве решений этой системы состоит из вектора $s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Этот вектор и вектор $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ линейно независимы. Поэтому $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Далее

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = S^{-1}ES = E, \tilde{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, мы привели исходную систему уравнений к следующим подсистемам:

- 1) $\ddot{y}_2 + y_2 = 0,$
- 2) $\ddot{y}_1 + y_1 + y_2 = 0.$

Обратим внимание, что группа G_1 матриц $g_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (где $k \in \mathbb{R}$) — это группа симметрии преобразованной системы уравнений. Эта группа не компактна. Действительно, подпространство $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ (где α — любое число) — инвариантное подпространство относительно группы G_1 и не имеет прямого дополнения, инвариантного относительно группы G_1 . Следовательно, исходная система уравнений также имеет некомпактную группу симметрии.

9. Нерешённые задачи

В отличие от методов «обычной» декомпозиции для методов иерархической декомпозиции пока еще не решены следующие задачи:

- создание высокоэффективного вычислительного алгоритма;
- обобщение метода на системы уравнений, содержащие прямоугольные матрицы; решение этой проблемы значительно расширит круг задач, где методы точной декомпозиции дают положительный результат;
- выявление свойств систем, для которых возможна иерархическая декомпозиция, аналогичных свойству «симметрия» для декомпозируемых в обычном смысле систем (быть может, здесь применимо, введенное В.И. Фущичем, понятие «условная симметрия» [16]);

– применение этих методов для исследования матричных макроэкономических моделей.

Литература

1. Базилевич Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. — Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
2. Динамика транспортных средств: Избр. Тр. / Лазарян В.А. — Киев: Наук. думка, 1985. — 528 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. /Ред. В.Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1980 — Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов/ Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова. 1980. 544 с.
4. Рокар И. Неустойчивость в механике. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959, 287 с.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
6. Базилевич Ю. Н., Швец И.В. Методы точной декомпозиции при анализе динамической модели Леонтьева.//Міждержавна науково-методична конференція “Проблеми математичного моделювання”. — Дніпродзержинськ, ДзДТУ, 2002. — С. 7.
7. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. — М.: Экономика, 1985. — 240 с.
8. Дрозд Ю.А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. — Киев: Институт математики АН УССР, 1977. — С. 104—114.
9. Ван дер Варден. Алгебра. — М.: Наука, 1976. — 648 с.
10. Чеботарев Н.Г. Введение в теорию алгебр. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 88 с.
11. Базилевич Ю.Н., Коротенко Л.М., Швец И.В. Численное решение задач иерархической декомпозиции линейных математических моделей // Міждержавна науково-методична конференція. Комп'ютерне моделювання. — Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2001. — С. 45—46.
12. Базилевич Ю. Н. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем // Дифференц. уравнения.— 1980.— 16, № 2.— С. 360—361.
13. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. — М.: ФАЗИС, 1998. VI+266 с.
14. Лопатин А.К. Об алгебраической приводимости систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1968. — 4, №3. — С. 439 — 445.
15. Bazilevich Yu.N. Hidden Symmetry Exposure. The Mechanical Systems with the Hard Structure of Forces// Праці Інституту математики НАН України. — Т. 50. — Ч. 3. — Київ: Інститут математики НАН України, 2004. — С. 1261—1265.
16. Фушич В.І. Вибрані праці. — Київ: Наук. думка, 2005. — 448 с.