**Національна академія наук України**
**Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова**

**БАЗИЛЕВИЧ Юрій Миколайович**

УДК 519.876

# МЕТОДИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ МАТРИЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

**01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи**

**АВТОРЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

**Київ — 2018**

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у ДВНЗ «Придніпровська академія будівництва та архітектури» Міністерства освіти і науки України (м. Дніпро).

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
**Галба Євген Федорович**,
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України,
старший науковий співробітник відділу методів дискретної оптимізації, математичного моделювання та аналізу складних систем.

доктор фізико-математичних наук, професор
**Новицький Віктор Володимирович**,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу математичних проблем механіки та теорії керування,

доктор фізико-математичних наук, професор
**Макаренко Олександр Сергійович**,
Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», завідувач відділом прикладного нелінійного аналізу.

Захист відбудеться 9 листопада 2018 р. о(об) 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.194.02 в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова за адресою:
03187, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова за адресою:
03187, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40.

Автореферат розісланий 20 вересня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради О. А. Вагіс

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** При розв'язанні широкого класу технічних й економічних задач корисно виконувати декомпозицію відповідних систем рівнянь. Наприклад, у практиці теорії коливань, будівельної механіки й у теоретичній фізиці накопичено великий досвід вибору невідомих таким чином, щоб одержати рівняння, розділені на підсистеми. Часто цей вибір робиться на інтуїтивному рівні. Спеціальні методи декомпозиції розвивалися окремо за декількома напрямками. Підхід, що погоджує локальні напрямки, раніше не розглядався.

Методи декомпозиції застосовуються для знаходження перетворення змінних, що приводить систему рівнянь до незалежних підсистем меншого порядку, або для доведення того факту, що в розглянутому випадку таке розбиття є неможливим. Можливість декомпозиції системи рівнянь дозволяє не тільки полегшити аналіз та синтез системи, але й зробити якісні висновки про властивості досліджуваної системи. Чисельне розв'язання задачі декомпозиції часто дає можливість виявлення прихованої симетрії системи. Інформація щодо симетрії системи може використовуватися, наприклад, при класифікації систем, при виявленні аналогів серед систем іншої природи.

На сьогодні з'явилася необхідність використовувати також «ієрархічну декомпозицію», тобто приведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду. При цьому виходить, що перша з підсистем не містить «чужих» змінних. До наступної підсистеми ввійдуть «свої» змінні і змінні попередньої підсистеми і т. і. Ієрархічна декомпозиція є особливо корисною тоді, коли звичайна декомпозиція не дозволяє одержати бажаного ефекту.

В Інституті технічної механіки НАН України роботи з декомпозиції було почато ще в другій половині 60-х років з ініціативи академіка НАН України В. А. Лазаряна. Напрямок досліджень в основному було продиктовано необхідністю роботи з несиметричними матрицями коефіцієнтів, обумовленими наявністю істотно неконсервативних сил. Протягом багатьох років науковим консультантом дисертаційної роботи був професор Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна М. Л. Коротенко.

Необхідним є поширення методів декомпозиції (в тому числі ієрархічної) на широкий клас систем: механічні системи зі складною структурою сил, електромеханічні, керовані, економічні й інші системи, а також використання цих методів для спрощення задач напівозначеного программування.

Тому створення універсальних й ефективних методів декомпозиції матричних математичних моделей є актуальним як для теорії, так і для практики аналізу і синтезу складних систем і, зокрема, для дослідження стійкості руху моделей направлюваних транспортних засобів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тема дисертаційного дослідження пов'язана з науковими темами Придніпровської державної академії будівництва й архітектури «Удосконалення фінансово-економічних й організаційних підходів і методів аналізу діяльності та управління розвитком виробничо-господарських і комерційно-посередницьких підприємств» (державний реєстраційний номер 0105U005298), «Підвищення ефективності діяльності підприємств на основі вдосконалення методів фінансово-економічної діагностики, контролінгу, логістики та менеджменту» (0106U002029), «Вдосконалення методів управління господарською та фінансово-економічною діяльністю підприємства в сучасних умовах функціонування економіки України» (0111U006482) і «Моделі, методи та інформаційні технології дослідження процесів і систем у будівництві» (0114U000527). У цих темах автор дисертації є виконавцем.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дослідження є створення універсальних й ефективних методів декомпозиції матричних математичних моделей та розробка обчислювальних алгоритмів їх реалізації. Розв'язок цієї наукової проблеми має важливе теоретичне і прикладне значення для математичного моделювання складних систем.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано такі задачі.

— Виконати теоретичне узагальнення вітчизняних і закордонних досліджень у даній області й на цій основі розробити комплексний підхід до створення методів декомпозиції матричних математичних моделей.
— Розробити теоретичні основи й обчислювальні методи для найкращої декомпозиції систем із декількома матрицями коефіцієнтів шляхом приведення матриць до блочно-діагонального вигляду з максимально можливою кількістю блоків.
— Розробити метод ієрархічної декомпозиції, заснований на приведенні матриць до блочно-трикутного вигляду.
— Розробити спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних систем.
— Розробити обчислювальні алгоритми й комп'ютерні програми реалізації методів декомпозиції.
— Застосувати розроблені алгоритми для практичного розв'язання технічних й економічних задач.

*Об'єктом дослідження* є матричні математичні моделі складних систем.

*Предметом дослідження* є методи декомпозиції систем лінійних рівнянь великої розмірності й відповідні обчислювальні алгоритми.

*Методи дослідження*. Загальною методологічною основою дослідження є лінійна й загальна алгебра, обчислювальні методи лінійної алгебри, практика використання сучасної обчислювальної техніки.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Представлені в дисертації теоретичні узагальнення, наукові положення й методи розвивають теорію моделювання систем, які описуються відповідною сукупністю підсистем.

Основні положення, що виносяться на захист є такі:

*вперше:*

— широке коло задач декомпозиції зведено до задачі про знаходження перетворення подібності допоміжних квадратних матриць, що дозволяє розглядати різні задачі декомпозиції з єдиних позицій;

- сформульовано й доведено теорему єдиності розв’язку задачі декомпозиції;
- розроблено спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних;
- отримано необхідні й достатні умови існування перетворення подібності, що приводить одночасно кілька матриць до блочно-трикутного вигляду; розроблено алгоритм обчислення матриці цього перетворення; таким чином, вирішено задачу про найкращу ієрархічну декомпозицію системи рівнянь;

*удосконалено:*

- методи оцінки області притягання розв'язку;
- методи спрощення задач напівозначеного програмування;

*набули подальшого розвитку:*

- методи декомпозиції рівнянь з прямокутними матрицями коєфіцієнтів; розглянуті різні окремі випадки підсистем «нестандартного» вигляду;
- результати з декомпозиції рівнянь руху складних механічних, електромеханічних систем, а також із декомпозиції матричних моделей міжгалузевого балансу.

**Практичне значення отриманих результатів.** Отримані результати дають можливість:

1) розробляти обчислювальні алгоритми, що мають більшу точність розрахунків, більш високу швидкодію;
2) аналізувати глибинні структурні взаємозв’язки досліджуваних систем й ефективніше використовувати інженерну інтуїцію, без якої є неможливим процес проектування систем;
3) використовувати методи паралельних обчислень;
4) скоротити час розрахунків у випадках застосування ітераційних методів, що вимагають багаторазового повторення обчислень;
5) збільшити швидкодію в задачах, де час обчислення є критичним, наприклад, при керуванні системою.

Практичне значення складають комп'ютерні програми, що дозволяють виконувати спрощення складних математичних моделей технічних і економічних систем, а також результати розрахунків. Використання результатів дисертації підтверджено актами впровадження Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна та ДВНЗ «Придніпровська академія будівництва та архітектури».

**Особистий внесок автора.** Всі наукові результаті отримано здобувачем самостійно. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати: [3, 42] – аналіз форм коливань системи, виведення формули для виконання кроку уздовж «яру»; [5, 8, 11] – аналіз форм коливань системи, участь у виконанні розрахунків; [9] – уточнення математичної моделі системи, участь у виконанні розрахунків; [14] – постановка завдання, участь у розробці прикладів, аналіз результатів; [20] – постановка завдання, участь у виконанні дослідження; [22, 24] – участь у виконанні дослідження; [30] – ідея методу; [31] – загальна схема алгоритму; [32-34, 45] – метод розрахунків; [46] – розділи 3 і 4.

**Апробація результатів дослідження.** Основні результати дисертації доповідалися на VIII Всесоюзній нараді із проблем керування (Таллін — 1980), на міжнародних конференціях з механіки залізничного транспорту (Дніпропетровськ — 1984, 1988, 1992, 1996, 2000), на конференції «Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь» (Дрогобич — 1987), на XIX Всесоюзній алгебраїчній конференції (Львів — 1987), на міжнародній конференції з математичного моделювання (Херсон — 1998), на міжнародній конференції «XXI сторіччя — проблеми й перспективи освоєння родовищ корисних копалин» (Дніпропетровськ — 1998), на міжнародній конференції «Проблеми та перспективи розвитку економіки України в умовах ринкової трансформації» (Дніпропетровськ — 1999), на міжнародному симпозіумі «Метод дискретних особливостей у задачах математичної фізики» (Коктебель — 1999), на міждержавних конференціях «Комп'ютерне моделювання» (Дніпродзержинськ — 2001, 2002), на міжнародних конференціях Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Київ — 2003, 2005, 2007), на засіданнях IX і X Кримських міжнародних математичних шкіл «Метод функцій Ляпунова і його застосування» (Алушта — 2008, 2010), на 7-й міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Харків — 2009), на Українському математичному конгресі (Київ — 2009), на Міжнародній конференції «Моделювання, управління і стійкість (MCS-2012)» (Севастополь — 2012), на 15-й Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ — 2014), 13-й Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпропетровськ — 2015), на регіональному науковому семінарі «Сучасні технології в проектуванні» (Дніпропетровськ — 2016), на наукових семінарах Харківського, Дніпропетровського, Санкт-Петербурзького й Московського університетів, на дніпропетровських міських семінарах: «Семінар із загальної механіки», «Геометричні питання аналізу», «Економіко-математичне моделювання», «Проблеми управління й інформатики», «Проблеми нелінійної механіки».

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи викладено в 46 наукових роботах, у тому числі у 24-х роботах [1-24] (серед яких 1 монографія [1]), опублікованих у наукових виданнях України до травня 1997 року [1-11] або включених у Перелік фахових видань України [12-24]. Серед цих робіт 2 роботи [15, 16] опубліковано у виданнях іноземних держав, 2 роботи [22, 23] — у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз і перекладаються англійською мовою видавництвами "Springer" та "Begell House, Inc.". 5 робіт [1, 4, 18, 19, 24] включені до інших міжнародних наукометричних баз.

17 робіт [25-41] опубліковано в матеріалах міжнародних наукових конференцій.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел із 177 найменувань і п'яти додатків. Загальний обсяг дисертаційної роботи становить 358 сторінок. Основний текст дисертації викладено на 273 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** доведено актуальність теми дисертації; окреслено мету й задачі дослідження, об'єкт, предмет і методи дослідження; анотовано елементи наукової новизни, обґрунтованої автором; розкрито практичне значення і зв'язок роботи з науковими програмами; наведено відомості щодо апробації результатів дослідження.

**Перший розділ** містить огляд стану проблеми й постановку задач даного дослідження.

У теорії коливань і будівельній механіці накопичено певний досвід вибору невідомих таким чином, щоб одержати рівняння, розділені на підсистеми. Це робиться на інтуїтивному рівні. Спеціальні методи декомпозиції розвивалися окремо за декількома напрямками: використання апріорної інформації щодо симетрії системи за допомогою теорії груп, алгебраїчні методи точної декомпозиції для лінійних систем із квадратними та із прямокутними матрицями коефіцієнтів, приведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду.

Апарат теорії скінчених груп застосовується у квантовій механіці із тридцятих років XX століття завдяки роботам математика Г. Вейля й фізика Е. Вігнера. Згодом цей апарат став широко використовуватися також і в теорії атома, теорії твердого тіла, пристроях надвисоких частот, спектроскопії, квантовій хімії й інших розділах фізики й хімії. На сьогодні є величезна кількість літератури із застосування зображень дискретних груп у задачах фізики. Для знаходження симетрій в нелінійних задачах математичної фізики використовуються групи та алгебри Лі. За цією тематикою існує багато результатів (Л. В. Овсянников, С. А. Владимиров, В. І. Фущич й А. Г. Нікітін), регулярно проводяться міжнародні конференції.

З 1969 р. з'являються роботи із застосування методів теорії скінчених груп у технічних задачах: О. І. Кухтенко, В. В. Удилов, М. Е. Шайкін, Ю. І. Самойленко. Ці методи застосовуються не тільки до об'єктів, які описуються системами звичайних диференціальних рівнянь, а й до стрижневих систем, для яких задачі статики описується алгебраїчними рівняннями, а динаміки — рівняннями в частинних похідних (В. В. Удилов, Г. Т. Ковбаса, В. М. Фомін). У роботі О. А. Дишліса й ін. вказано на можливість складання групи матриць зображення й обчислення проекторів на інваріантні підпростори за допомогою ЕОМ. Методи і програмні комплекси для розрахунків на ЕОМ симетричних конструкцій описано в книзі М. Л. Буришкіна й В. Н. Гордєєва, а також у книзі Дж. Злоковича. Існує ряд оглядів робіт із застосування дискретних і безперервних груп у теорії керування й у механіці (Ю. Н. Андрєєв, А. А. Богоявленський, В. М. Павлов, Ю. М. Павловський, В. І. Йолкін та ін.). У роботах Ю. М. Павловського докладно обговорюються властивості систем що декомпозуються, взаємозв'язки теорії декомпозиції з теорією інваріантності та іншими.

Оскільки системи автоматичного управління описуються рівняннями, що містять квадратні і прямокутні матриці, то в роботі Г. В. Можаєва дається узагальнення теореми Вігнера на випадок прямокутних матриць.

Розробка алгебраїчних методів декомпозиції стикається з певними труднощами, тому що задача одночасного приведення декількох матриць до деякої канонічної форми перетвореннями подібності — це класична невирішена задача. Вона обговорювалася в роботах А. В. Ройтера, Л. А. Назарової, І. М. Гельфанда, В. А. Пономарьова. У теперішній час над цією проблемою працюють Ю. А. Дрозд, В. М. Бондаренко, В. В. Сергейчук, Б. З. Шаваровський, Х. Д. Ікрамов.

З алгебраїчних методів відзначимо в першу чергу метод комутуючої матриці. Він полягає в тому, що спочатку визначається централізатор — множина всіх матриць, комутуючих із матрицями коефіцієнтів досліджуваної системи. Необхідною й достатньою умовою можливості декомпозиції системи є наявність у цій множині матриці, що має хоча б два різні власні числа. Шуканим перетворенням є те, яке приводить таку матрицю до жорданової форми. Метод комутуючої матриці описав О. К. Лопатін у 1968 р. для задач із квадратними матрицями та К. Д. Якубович у 1969 р. для задач із прямокутними матрицями. У роботі В. В. Удилова (1974 р.) використовується множина комутуючих матриць в окремому випадку: коли ця множина є напівпростою алгеброю. Для цього ж окремого випадку доведено єдиність розкладання рівнянь на підсистеми.

Узагальненням методу комутуючої матриці є теорема, доведена К. Д. Якубович. Для її викладення введемо наступні позначення. Нехай $v(D)$ — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису матриці $D$, тобто така матриця, що $v^{-1}(D)\, D\, v(D) = \mathrm{Gr}(D)$, де $\mathrm{Gr}(D)$ — жорданова форма матриці $D$. Далі нам знадобиться система матричних рівнянь $T_1 B_i = B_i T_2,\quad i = \overline{1,g}$, де $T_1$ і $T_2$ — квадратні матриці порядків $m$ і $n$ відповідно. Множину лінійно незалежних розв'язків цієї системи може бути отримано через знаходження загального розв'язку відповідної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, невідомими якої є всі елементи матриць $T_1$ і $T_2$.

Нехай $\sigma(T_i)$ — множина всіх різних власних чисел матриці $T_i$ і $\sigma_0(T_1, T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.

Теорема (К. Д. Якубович). *Нехай $T_1$, $T_2$ — розв'язок рівнянь $T_1B_i = B_iT_2$ й $H = v^{-1}(T_1)$, $S = v(T_2)$. Тоді, якщо множина $\sigma_0(T_1, T_2)$ має понад одного елементу, то перетворення $\hat{B}_i = HB_iS$, $i = \overline{1,g}$ матриць $B_i$ приводить їх до такого вигляду:*

$$\hat{B}_i = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} B_{i1} & & & 0 & 0 \\ & B_{i2} & & & 0 \\ & & \ddots & & \cdots \\ 0 & & & B_{i\,d-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_{d-1} \\ m_d \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_{d-1} & n_d \end{array} & \end{array} . \qquad (1)$$

*Тут* $n_k \times m_k$ *— розмірності блоків матриці,* $d-1$ *— кількість співпадаючих власних чисел матриць* $T_1$ *і* $T_2$*,* $\{n_i\}$ *(при* $i < d$*) — кратності власних чисел матриці* $T_1$*, а* $\{m_i\}$ *— матриці* $T_2$*. Число* $n_d$ *дорівнює сумі кратностей всіх власних чисел матриці* $T_1$*, що не збігаються з жодним із власних чисел матриці* $T_2$*,* $m_d$ *— сумі кратності всіх власних чисел матриці* $T_2$*, що не збігаються з жодним із власних чисел матриці* $T_1$*.*

У загальному вигляді теорему єдиності розв'язку задачі декомпозиції та її узагальнення на випадок задач із прямокутними матрицями опубліковано автором даної дисертації у 1979 р. Незалежно від цієї роботи І. Ф. Борецький і В. М. Павлов у 1979 р. довели єдиність розв'язку задачі декомпозиції для деяких окремих випадків. В. Є. Білозьоров і Г. В. Можаєв опублікували статтю про теорему єдиності у 1982 р., тобто після автора.

Слід відрізняти розглянуту тут декомпозицію рівнянь із прямокутними матрицями від робіт Фальба, Воловича та ін. з розщеплення таких рівнянь за допомогою перетворення типу «зворотного зв'язку», тобто перетворення, при якому використовується спільне перетворення змінних стану й керуючих змінних.

Ієрархічна декомпозиція відповідає приведенню матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду. Робіт на цю тему порівняно мало. У статті О. К. Лопатіна це питання, очевидно, розглядається вперше. Деякі результати в цьому напрямку є в книзі П. С. Казімірського та в роботах Г. В. Можаєва й В. Є. Білозьорова. Необхідні та достатні умови для одночасного приведення матриць до блочно-трикутного вигляду раніше не були отримані, обчислювального алгоритму також не існувало.

Автор опублікував повний розв'язок цієї проблеми для випадку квадратних матриць у своїй монографії у 1987 р. Розробку обчислювальних алгоритмів, комп'ютерних програм й одержання результатів розрахунків виконано разом зі співавторами після 2000 року.

Існують методи приведення великої системи рівнянь до окремих підсистем рівнянь для блоків аналізованої системи та додаткової координуючої системи рівнянь, яка відповідає зв'язкам між блоками. Г. Крон назвав такий підхід «*діакоптикою*». Аналогічний підхід використовується в задачах лінійного програмування — *декомпозиція Данцига — Вульфа.* На сьогодні методи Г. Крона розвиває Е. В. Сметанин.

Тема декомпозиції матриць наразі стала більш актуальною у зв’язку із проблемою спрощення задач напівозначеного програмування.

Центральне місце в дослідженні посідають такі дві задачі:

**Задача 1.** Дано наступні g матриць $B_1, B_2, \ldots, B_g$, потрібно знайти таке перетворення подібності, яке приведе ці матриці одночасно до однакового блочно-діагонального вигляду

$$\tilde{B}_\nu = S^{-1} B_\nu S = \begin{bmatrix} [1] & & & 0 \\ & [2] & & \\ 0 & & \ldots & \\ & & & [l] \end{bmatrix}$$

так, щоб кількість блоків на головній діагоналі матриць була максимальною: $\max\limits_{S:\det(S)\neq 0} l.$

Тут і далі в теоретичних твердженнях фігурують комплексні матриці, а в розрахунках майже завжди вдається не виходити за межі арифметики дійсних чисел.

**Задача 2.** Ця задача є аналогічною першій, але потрібно привести матриці до блочно-трикутного вигляду:

$$\tilde{B}_\nu = S^{-1} B_\nu S = \begin{bmatrix} [1] & & & \\ & [2] & & \\ 0 & & \ldots & \\ & & & [m] \end{bmatrix}, \quad \max\limits_{S:\det(S)\neq 0} m.$$

У наступних розділах викладено теоретичний і обчислювальний розв’язок цих задач, а також зазначено, як застосувати цей розв’язок для різних задач декомпозиції, виявлення прихованої симетрії технічних й економічних систем, для аналізу й синтезу складних систем.

**У другому розділі** розглянуто приведення до незалежних підсистем таких систем лінійних рівнянь, які описуються декількома матрицями. Показано, як звести цю задачу до задачі про знаходження перетворення подібності для допоміжних квадратних матриць. Описані способи приведення даних матриць до декількох блоків. Доведено, що послідовність таких приведень дозволяє одержати максимально можливу кількість незалежних підсистем. Доведена єдиність (у певному сенсі) такого розщеплення.

Поділ на підсистеми в багатьох випадках дозволяє не тільки скоротити час обчислення та підвищити точність при розрахунках на ПЕОМ, а й краще зрозуміти структуру досліджуваної системи, її властивості.

У ряді випадків декомпозиція дозволяє спростити викладки при одержанні розв’язку в замкнутій формі.

Особливо корисним є приведення до підсистем за допомогою перетворення, що не залежить від деяких параметрів системи. Наприклад, для оптимізації параметрів системи рівнянь за допомогою пошукових методів необхідно робити багаторазові обчислення при різних значеннях цих параметрів. Виконане один раз розщеплення системи рівнянь дозволяє спростити розрахунки на кожному кроці оптимізації, що приводить до значного скорочення загальних витрат машинного часу.

Розглянемо систему рівнянь

$$B_1(\boldsymbol{\mu})\ddot{\mathbf{q}} + B_2(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{q}} + B_3(\boldsymbol{\mu})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \qquad (2)$$

де $\mathbf{q}, \mathbf{Q}(t) \in \mathbb{C}^n\ \forall t$, а $B_i(\boldsymbol{\mu})$ — комплексні матриці розміром $m \times n$, що лінійно залежать від параметрів $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$: $B_i(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^{p} \mu_k B_i^{(k)}$; $B_i^{(k)}$ — постійні матриці. Випадок дійсних змінних і деякі інші системи рівнянь буде розглянуто далі.

Матриці $B_i^{(k)}$ позначаємо так: $B_1, B_2, \ldots, B_g$, де $g = 3k$. Неособливі лінійні перетворення системи (2) — це: а) заміна змінних $\mathbf{q} = Sy$, де $S$ — неособлива матриця, б) множення системи зліва на неособливу матрицю $H$. При цьому матриці перетворяться так:

$$\hat{B}_i = HB_iS\,,\ i = \overline{1, g}\,. \qquad (3)$$

Позначимо розмірності блоків $B_{ik}$, отриманих у результаті перетворення підсистем через $m_k \times n_k$, при цьому $\sum_{k=1}^{l} m_k \le m$, $\sum_{k=1}^{l} n_k \le n$. При даних матрицях $B_i$ кількість блоків $l$ і розмірності $m_k \times n_k$ залежать від $H$ и $S$. Позначимо $N(H, S)$ — максимальний із добутків $m_k \times n_k$. Ставляться задачі знайти $H$ і $S$, за яких досягається

а) $\min\limits_{\Omega} N(H, S)$, $\Omega = (H, S\colon \det H \ne 0, \det S \ne 0)$;

б) $\max\limits_{\Omega} l$.

Нижче буде зазначено правила обчислення матриць $H$ і $S$, а також доведено, що розв’язок другої задачі одночасно є розв’язком першої.

Розв’язання задач а) і б) полягає в такому: спочатку складаються допоміжні квадратні матриці, для яких потрібно розв’язати таку саму задачу, але використовуючи лише перетворення подібності (теорема 2.1); далі за допомогою множини матриць, комутуючих із даними (способи А і Б), послідовно приводяться до блочно-діагонального вигляду спочатку допоміжні матриці, потім отримані на попередньому етапі блоки; ознакою неможливості подальшого приведення даних блоків є відсутність матриці, що має хоча б два різні власні числа у множині матриць, комутуючих з даними блоками;

теорема 2.2 стверджує, що зазначені дії дозволяють знайти необхідне перетворення для допоміжних матриць, а отже, і розв'язати задачі а) і б).

Розглянемо перехід до задачі зі знаходження перетворення подібності.

Введемо позначення. Нехай $\upsilon(D)$ — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису матриці $D$, тобто така матриця, що $\upsilon^{-1}(D)\,D\,\upsilon(D) = \mathrm{Gr}(D)$, де $\mathrm{Gr}(D)$ — жорданова форма матриці $D$.

**Теорема 2.1.** *Рівняння (2) розщеплюються за допомогою перетворення (3) тоді й тільки тоді, коли приводяться одночасно до блочно-діагонального вигляду наступні $g + 1$ матриці:*

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix},\ C_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ i = \overline{1,g}$$

*за допомогою перетворення подібності*

$$\tilde{C}_j = R^{-1} C_j R = \mathrm{diag}(C_{jk}).$$

Таким чином, задача зі знаходження перетворення (3) для розщеплення рівнянь (2) зводиться до задачі одночасного приведення допоміжних матриць $C_j$ до блочно-діагонального вигляду через перетворення подібності:

$$\tilde{C}_j = R^{-1} C_j R = \mathrm{diag}(C_{jk}),\ k = \overline{1,l}\,;\ j = \overline{1, g+1}.$$

До цієї ж задачі приходимо і при спрощенні деяких інших типів рівнянь.

Розглянемо алгебру $\Lambda(C_j)$ усіх матриць, комутуючих із матрицями $C_j$, тобто множину розв'язків системи матричних рівнянь

$$C_j Z = Z C_j, \quad j = \overline{1,g}\,. \tag{4}$$

Ця алгебра є централізатором множини $\{C_j\}$ в алгебрі всіх матриць порядку $n_0$. Загальний розв'язок системи (4) має вигляд:

$$Z = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k W_k\,,$$

де $\alpha_k$ — вільні змінні; $W_k$ — матриці, що є базисом алгебри $\Lambda(C_j)$. Множина розв'язків системи (4), а саме матриці $W_k$, можна знайти, розв'язавши систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь; алгоритм, що дозволяє здійснити це при високому порядку матриць $C_j$, описано нижче.

Існують такі способи знаходження матриці $R$ перетворення подібності.

**Спосіб А** — метод комутуючої матриці (його розглянуто вище).

**Спосіб Б.** Складаємо й вирішуємо систему рівнянь

$$\sum_{v=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\gamma_{vj}^{(\mu)}\rho_v\rho_j = \rho_\mu\,,\ \mu=\overline{1,r}\,, \qquad (5)$$

де $\gamma_{vj}^{(\mu)}$ — структурні константи алгебри $\Lambda(C_j)$; $r$ — ранг цієї алгебри; $\rho_v$ — координати невідомого проектора $P$ у базисі $W_\mu$. Якщо матриці $C_k$ приводяться до блочно-діагонального вигляду, то наведена вище система рівнянь має розв'язок, відповідний до нетривіального проектора $P_1$. Із лінійно незалежних стовпців матриць $P_1$ і $P_2 = E - P_1$ складаємо матрицю $R$. Ідею способу Б узято з робіт В. В. Удилова.

Приведення до блоків мінімального порядку здійснюється через послідовне застосування способів А або Б спочатку до матриць $C_k$, потім до блоків, які отримано, до знаходження таких блоків, що далі не розщеплюються (на першому кроці бажано застосування методів, які використовують апріорну інформацію щодо симетрії відповідної фізичної системи).

Залишається переконатися в тому, що після приведення до блоків, що не розщеплюються далі, вже неможливо збільшити їхню кількість, тобто якби ми проводили розщеплення в іншому порядку, то однаково не одержали б більшої кількості блоків. Про це свідчить теорема 2.2.

**Теорема 2.2.** *Нехай матриці $C_j$, $j=\overline{1,g}$, через деяке перетворення подібності приводяться до блочно-діагонального вигляду*

$$\tilde{C}_j = R_1^{-1}C_jR_1 = \mathrm{diag}(C_{jk}),\ \ k=\overline{1,l_1};\ j=\overline{1,g},$$

*причому кожний набір блоків $C_{jk}$, $j=\overline{1,g}$, не приводиться до декількох блоків одночасно. Якщо існує інше таке перетворення, що отримані блоки не розщеплюються далі,*

$$\tilde{C}'_j = R_2^{-1}C_jR_2 = \mathrm{diag}(C'_{j\mu}),\ \mu=\overline{1,l_2}\,,\ j=\overline{1,g}\,,$$

*то $l_1 = l_2$ і може бути встановлена відповідність $\mu(k)$ між номерами $k$ і $\mu$ така, що блоки $C_{jk}$ подібні до блоків $C'_{j\mu(k)}$: $C_{jk} = S_k^{-1}C'_{j\mu(k)}S_k$.*

Теорема 2.2 встановлює єдиність приведення рівнянь до підсистем, що не розщеплюються.

*Зауваження.* Якщо в централізаторі $\Lambda\,(C_j)$ немає жодної матриці, що має хоча б два різні власні числа, то не існує перетворення подібності, що приводить матриці $C_j$ одночасно до блочно-діагонального вигляду.

Слід розглянути окремо випадок, коли всі елементи $W_k$ базису алгебри $\Lambda\,(C_j)$ не мають відмінних власних чисел. Якщо при цьому алгебра має ранг $r=1$, то зрозуміло, що $W_1 = \alpha E$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ і початкові матриці $C_j$ не приводяться до блочно-діагонального вигляду. При $r>1$ це — особливий випадок. Його можна подолати, наприклад, за допомогою способу Б і розв’язання рівнянь (5). Розв’язання такої системи нелінійних рівнянь звичайно складніше, ніж застосування способу А.

Часто виникає задача розщеплення цих рівнянь при використанні тільки дійсних перетворень. Для дійсної матриці $D$ введемо матрицю $U(D)$ таку, що дійсні стовпці матриць $\upsilon(D)$ і $U(D)$ збігаються, а на місці кожної пари комплексно спряжених векторів-стовпців $\mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ матриці $\upsilon(D)$, що відповідають комплексно спряженим власним числам $\alpha \pm i\beta$ матриці $D$, у матриці $U(D)$, розташовані дійсні стовпці $\mathbf{a}$ й $\mathbf{b}$.

Позначимо, що багато комп’ютерних програм обчислення власних векторів видають результат у вигляді матриці $U(D)$.

Для випадку дійсних змінних виконуються теореми, аналогічні теоремам, доведеним для загального випадку, але замість матриці $\upsilon(D)$ використовується матриця $U(D)$, замість умови «Хоча б два різні власні числа» ставиться умова «Хоча б два різні власні числа, що мають невід’ємні уявні частини». Кількість підсистем, які отримано тільки за допомогою дійсних перетворень, може бути меншою, ніж у загальному випадку. Наприклад, матриці $C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ не приводяться до діагонального вигляду дійсними перетвореннями подібності, але приводяться комплексними.

Розроблено алгоритми й комп’ютерні програми, що дозволяють подолати обчислювальні труднощі, які виникають при використанні методів декомпозиції для великих систем рівнянь. Зокрема, створено алгоритм знаходження множини всіх матриць, комутуючих із декількома даними, через знаходження базису множини розв’язків системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Автором розроблено комп’ютерну програму SLAU5 для розв’язання такої задачі. Це може бути корисним і в інших обчислювальних задачах лінійної алгебри:

- обчислення рангу матриці,
- перевірка лінійної незалежності векторів,
- знаходження базису підпростору,
- знаходження підпростору, ортогонального даному підпростору, тощо.

Розроблено також варіант програми SLAU5 для випадку великих сильно розріджених систем рівнянь. Він використовувався при знаходженні базису в множині розв’язків рівнянь із матрицею коефіцієнтів розмірності 578 x 289. Для перевірки програми вирішувався тестовий приклад із числом невідомих, рівним 4400.

Вирішено задачу виявлення випадків, коли досліджувана система рівнянь не розщеплюється, але є близькою до такої системи рівнянь, для якої існує перетворення змінних, що приводить систему до окремих підсистем. Близькість тут розуміється як наближена рівність усіх коефіцієнтів однієї системи рівнянь коефіцієнтам іншої. Як було зазначено раніше, можливість або неможливість розщеплення рівнянь залежить від властивостей розрахункової схеми фізичної системи, що відповідає досліджуваній. У комп’ютер, як правило, вводяться наближені початкові дані. Це підкреслює важливість отриманих у цьому напрямку результатів.

Розглянуто питання застосування методів теорії груп для вибору узагальнених координат, відповідних до симетрії складної механічної системи. Показано, як істотно неконсервативні сили звужують групу симетрії, яку допускають консервативні сили. Наведено результати розрахунків для конкретних механічних й електромеханічних систем.

Питання практичного застосування методів теорії груп розглядаються на прикладі розрахункових схем рейкових екіпажів та екіпажів транспорту на магнітному підвішуванні. Ці системи характеризуються високим порядком матриць коефіцієнтів і наявністю неконсервативних сил, завдяки яким матриці коефіцієнтів стають несиметричними. Усе це викликає певні труднощі як при складанні груп симетрії, так і при виконанні обчислень.

Симетрія фізичної системи проявляється в тому, що існують перетворення $g_i$ простору, щодо яких система, а отже, і її математична модель, є інваріантними (незмінними). До таких перетворень належать відображення фізичної системи щодо площин симетрії, повороти навколо осей, тощо.

Якщо у множині перетворень $g_i$ ввести операцію послідовного застосування перетворень $g_c = g_a g_b$, то ця множина стає групою. Дійсно, послідовне застосування таких перетворень має властивість асоціативності, роль одиниці групи відіграє тотожне перетворення, за яким узагальнені координати не змінюються, і для кожного з перетворень існує зворотне. Кожне з перетворень узагальнених координат системи задається матрицею $\mathrm{T}(g_i)$. Ці матриці утворюють зображення групи, тобто таке відображення даної групи у групу матриць, що $\mathrm{T}(g_i g_j) = \mathrm{T}(g_i)\mathrm{T}(g_j)$. Властивість інваріантності системи щодо перетворень $g_i$ виражається в тому, що матриці $\mathrm{T}(g_i)$ комутують із матрицями коефіцієнтів системи рівнянь.

У літературі докладно описано всі скінченні групи, що використовуються в прикладних розрахунках. Наведено також їх незвідні зображення $\tau_k(g_i)$ ($k = \overline{1,m}$, $m$ — кількість різних незвідних зображень даної групи). Розкладання зображень $\{\mathrm{T}(gi)\}$ на незвідні зображення відповідає поділу системи рівнянь на кілька підсистем. Це розкладання виконується за допомогою формули для знаходження проекторів:

$$P_{jk} = \frac{s_j}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{\boldsymbol{\tau}_{jk1}(g_i)}\mathbf{T}(g_i), \; j = \overline{1,m}, \; k = \overline{1,s_j},$$

де $\tau_{jk1}(g_i)$ — елемент матриці незвідного зображення $\tau_j(g_i)$; $s_j$ — порядок цієї матриці; $m$ — кількість різних незвідних зображень групи. Недоліком цих формул є те, що треба знати всі матриці $\mathrm{T}(g_i)$. Якщо це матриці високого порядку і група $G$ містить багато елементів, то таке обчислення може виявитися громіздким. З іншого боку, практично всі групи симетрії, що трапляються в застосуваннях, містять не більше трьох твірних елементів. Однак алгоритм, що використовує тільки твірні елементи групи $\mathrm{T}(g_i)$, теж є досить складним. Очевидно, найпростішим способом у випадку великої групи є знаходження за допомогою ПЕОМ усіх елементів групи $\mathrm{T}(g_i)$ за твірними елементами й обчислення проекторів. Із цією метою була складено програму.

Для роботи програми вводимо лише твірні елементи групи $\mathrm{T}(\mathrm{g}_\nu)$ ($\nu = \overline{1, \mathrm{N}1}$) і незвідних зображень $\tau_j(\mathrm{g}_\nu)$ ($\nu = \overline{1, \mathrm{N}1}$). Складання всієї групи здійснюється за допомогою допоміжної таблиці перемножень. Якщо матриці $\mathrm{T}(\mathrm{g}_\nu)$ мають блочно-діагональний вигляд для всіх $\nu$ одночасно, то можна робити обчислення для кожного блоку окремо.

Нерідко складним механічним системам властива наявність сил, що лінійно залежать від координат із коефіцієнтами, які утворюють несиметричну матрицю. Такі сили називають суттєво неконсервативними, або неконсервативними позиційними, циркуляційними силами, силами радіальної корекції, властиво неконсервативними силами, псевдогіроскопічними, силами обмеженого демпфірування тощо. Коли механічна система містить такі сили, слід розглядати вже не інваріантність відповідних квадратичних форм, як це зазвичай робиться, а інваріантність матриць коефіцієнтів системи. Природно, що при цьому група симетрії, яка допускається консервативними силами, звужується. Дослідження стійкості руху рейкових екіпажів ускладнюється наявністю сил псевдоковзання (сил крипу), що є сумою дисипативних і позиційних неконсервативних сил. Вони з’являються тому, що при коченні колеса по рейці виникає явище псевдоковзання, викликане місцевими деформаціями рейки й колеса поблизу контакту. Це пояснюється тим, що візок рейкового екіпажа, що поєднує дві (іноді три) колісні пари з конічними колесами, не може рухатися без «прослизання», коли він є зміщеним щодо положення рівноваги. Виникаючі при цьому сили, згідно з теорією Картера, вважають пропорційними відносним «прослизанням».

Становить інтерес складання групи симетрії, відповідної виконаній декомпозиції.

Розглянемо рівняння (2) при $m = n$ і $B_1^{(1)} = E$.

**Теорема 2.4.** *Матриці $T_\mu = RL_\mu R^{-1}$, де $L_\mu = diag(E_1, E_2, ..., -E_\mu, ..., E_l)$, є твірними елементами групи симетрії вихідної системи. Така група не єдина.*

Становить інтерес складання такої групи $G_0$ матриць $n$-го порядку, щоб будь-яка скінченна група симетрії системи мала ізоморфне унітарне зображення в якості однієї з підгруп групи $G_0$.

На сьогодні можна дати відповідь на це питання у випадку підсистем першого порядку, тобто коли рівняння приводяться до головних координат. Нехай кількість різних підсистем першого порядку дорівнює $p$, а кратності кожної з підсистем рівні $m_1, m_2, ..., m_p$. Можна довести, що група $G_0$ породжено матрицями, які мають вигляд:

$$L_{kg} = R\,\mathrm{diag}(E_{m1}, ..., E_{mk-1}, g, E_{mk+1}, ..., E_{mp})R^{-1}, \tag{6}$$

де $k=\overline{1,p}$, $g$ пробігає множини твірних елементів усіх скінченних унітарних груп матриць порядку $m_k$. Матриця $R$ у виразі (6) повинна бути унітарною.

При $m_k = 1$ «матриця» $g$ приймає значення коренів різних ступенів з одиниці: $\cos\dfrac{2k\pi}{r} + i\sin\dfrac{2k\pi}{r}$, $k=\overline{0, r-1}$, $r=\overline{1,\infty}$.

Фізична система вважається симетричною, якщо рівняння її руху інваріантні щодо будь-яких нетривіальних перетворень змінних. Таке визначення приводить до парадоксального висновку. Виходить, що будь-яка консервативна система є симетричною, оскільки її рівняння приводяться до головних координат, а це означає існування нетривіальної групи симетрії (див. теорему 2.4). Очевидно, слід розрізняти симетрію фізичної системи й симетрію рівнянь.

Розроблено алгоритм одержання за допомогою ПЕОМ незвідних зображень довільної скінченної групи. Для цього складається матричне регулярне зображення групи, потім здійснюється одночасне приведення всіх матриць до блочно-діагонального вигляду за допомогою методики, описаної в даному розділі. При цьому «особливий випадок» є неможливим (теорема 2.5).

**Теорема 2.5.** *Нехай $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — скінчена група матриць, $\Lambda$ — централізатор розмірності $r$ цієї групи в алгебрі матриць порядку $n$. Якщо $r > 1$, то існує перетворення подібності, яке приводить матриці $B_i$ до однакового блочно-діагонального вигляду.*

Незважаючи на те, що детальну інформацію щодо точкових і деяких інших груп наведено у відповідній літературі, становить інтерес можливість знаходження незвідних зображень груп для нових завдань. Наприклад, для дослідження нежорстких молекул і кристалів потрібно знати незвідні зображення таких груп, які не є точковими.

Розглянуто різні типи рівнянь еволюції систем автоматичного управління. Це, як правило, рівняння із прямокутними матрицями коефіцієнтів. Установлено відповідність між задачами приведення розглянутих рівнянь до підсистем менших розмірів і приведення декількох квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду через перетворення подібності. Ця відповідність дозволяє поширити на дані системи рівнянь обчислювальні методи й теоретичні результати, отримані в попередніх розділах.

Розглянемо спочатку рівняння

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},\ \ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \tag{7}$$

де $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$; $\mathbf{u}\in\mathbb{C}^m$; $\mathbf{y}\in\mathbb{C}^p$; $A$, $B$, $C$ і $D$ — матриці відповідних розмірів. Потрібно знайти заміну змінних

$$\mathbf{x} = S_1\mathbf{x}',\ \mathbf{u} = S_2\mathbf{u}',\ \mathbf{y} = S_3\mathbf{y}', \tag{8}$$

після якої систему (7) буде приведено до підсистем меншого порядку. Для цього будемо використовувати множину розв’язків системи матричних рівнянь

$$H_1A = AH_1,\ H_1B = BH_2,\ H_3C = CH_1,\ H_3D = DH_2. \tag{9}$$

Відзначимо, що при ненульовій матриці $B$ матриця $H_2$ має власні числа, що збігаються з деякими власними числами $H_1$, інакше наслідком того, що спектри матриць не перетинаються, було б те, що $B = 0$. Аналогічну властивість має матриця $H_3$. Вважаємо, що власні числа матриць $H_2$ і $H_3$ пронумеровано в такий спосіб: спочатку ті з них, які збігаються із власними числами матриці $H_1$, у такому самому порядку, потім — інші власні числа.

Як і раніше, через $v(D)$ позначаємо матрицю, що приводить дану матрицю $D$ до жорданової форми.

**Теорема 2.6.** *Нехай $\{H_i\}$ — розв'язок рівнянь (9); $S_i = v(H_i)$. Тоді після заміни змінних (8) матриці коефіцієнтів рівнянь (7) набудуть вигляду*

$$\widetilde{A} = S_1^{-1}AS_1 = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, Aq)$$

$$\hat{B} = S_1^{-1}B\,S_2 = \left[\begin{array}{ccccc:c} B_1 & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & B_2 & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & & & & B_q & 0 \end{array}\right],$$

$$\hat{C} = S_3^{-1}C\,S_1 = \left[\begin{array}{cccccc} C_1 & & & & & \mathbf{0} \\ & C_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & & & C_q \\ \hdashline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right], \tag{10}$$

$$\hat{D} = S_3^{-1}D\,S_2 = \left[\begin{array}{cccccc:c} D_1 & & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & D_2 & & & & & 0 \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{0} & & & & & D_{q+r} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{array}\right].$$

*Тут* $q$ *— кількість різних власних чисел матриці* $H_1$*; порядки* $n_k$ *блоків* $A_k$ *дорівнюють кратностям цих власних чисел; розмірності блоків* $B_k$ *(відповідно* $C_k$*) дорівнюють* $n_k$ Ч $m_k$ *(*$p_k$ Ч $n_k$*), де* $m_k$ *(*$p_k$*) — кратність власного числа матриці* $H_2$ *(*$H_3$*), що збігається із власним числом матриці* $H_1$*, що мають номер k; якщо це власне число є відсутнім, то в перетвореній матриці відсутнім є відповідний блок; число нульових стовпців матриці* $\hat{B}$ *(рядків матриці* $\hat{C}$*) дорівнює кількості всіх власних чисел матриці* $H_2$ *(відповідно* $H_3$*), що не збігаються з жодним із власних чисел матриці* $H_1$*. Розмірності блоків* $D_k$ $(k=\overline{1,q})$ *дорівнюють* $p_k \times m_k$*. При* $k=\overline{q+1,q+r}$ *розмірності блоків* $D_k$ *дорівнюють* $s_k \times t_k$*, де* $r$ *— кількість співпадаючих власних чисел матриць* $H_2$ *і* $H_3$*, що відрізняються від власних чисел матриці* $H_1$*; sk і tk — відповідно кратності цих чисел для матриць* $H_2$ *і* $H_3$*. Число останніх нульових стовпців матриці* $\hat{D}$ *дорівнює сумарній кратності всіх власних чисел матриці* $H_2$*, що не збігаються з жодним із власних чисел матриць* $H_1$ *і* $H_3$, а *кількість нижніх нульових рядків — сумарній кратності всіх власних чисел матриці* $H_3$*, що не збігаються з жодним із власних чисел матриць* $H_1$ *і* $H_2$*.*

*Наслідок*. Якщо хоча б одна з матриць $H_k$ має не менше двох різних власних чисел, то заміна змінних (8) при $S_k = v(H_k)$ приводить рівняння (7) до підсистем менших розмірів: $\dot{\mathbf{x}}_k = A_k\mathbf{x}_k + B_k\mathbf{u}_k$, $\mathbf{y}_k = C_k\mathbf{x}_k$, $k=\overline{1,q}$, $\mathbf{y}_{q+1} = 0$.

При цьому сума порядків $n_k$ векторів $\mathbf{x}_k$ дорівнює $n$, сума порядків $m_k$ векторів $\mathbf{u}_k$ не перевищує $m$ і сума порядків $p_k$ векторів $\mathbf{y}_k$ з урахуванням вектора $\mathbf{y}_{q+1}$ дорівнює $p$.

Таким чином, зменшення розмірів рівнянь (7) може бути досягнуто не тільки за рахунок поділу на підсистеми, аналогічні (7), але і за рахунок зменшення розмірів вектора $\mathbf{u}$ або за рахунок виділення підсистеми вигляду $\mathbf{y}_{q+1} = \mathbf{0}$.

Відзначимо таке:

- ♦ Вектор $\mathbf{u}_{q+1}$ у перетворені рівняння не входить. Наявність такого вектора означає, що система рівнянь не залежить від керувань $\mathbf{u}_{q+1}$.
- ♦ Як видно з виразів (10), матриці $\hat{B}$ і $\hat{C}$ не завжди є блочно-діагональними.
- ♦ Якщо при деякому $k$ отримано, що $n_k \neq 0$ і $m_k = 0$ (або $p_k = 0$), то відповідна підсистема, а отже, і вся система є некерованою (неспостережною).

Розглянута задача може бути зведена до вирішених раніше. Для цього складаємо допоміжні матриці. Розглянемо такі квадратні матриці порядку $l = n + m + p$:

$$C_1 = \mathrm{diag}(E_n, 2E_m, 3E_p,), \quad C_2 = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

де $E_k$ — одинична матриця порядку $k$.

**Теорема 2.7.** *Будь-яка матриця Z, комутуюча з матрицями (11), має вигляд* $Z = \mathrm{diag}(H_1, H_2, H_3)$*, де* $\{H_1, H_2, H_3\}$ *— розв'язок рівнянь (9).*

Таким чином, для знаходження загального розв'язку рівнянь (9) можна скористатися програмою знаходження множини матриць, комутуючих із даними.

**Теорема 2.8.** *Система (7) приводиться до підсистем меншого порядку за допомогою перетворення (8) тоді і тільки тоді, коли матриці (11) приводяться одночасно до блочно-діагонального вигляду через перетворення подібності.*

Допоміжні матриці підібрано і для інших систем рівнянь. При цьому справедливими є твердження, аналогічні теоремам 2.7 і 2.8, а матриці заміни змінних складаються із власних векторів блоків, що стоять на головній діагоналі матриці, комутуючої з допоміжними.

Відповідність між задачами розщеплення рівнянь і приведення квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду, яку установлено вище, є корисною не тільки з обчислювальної точки зору. На задачі розщеплення розглянутих вище систем рівнянь поширюються і теоретичні результати. Із встановленої відповідності випливає, що послідовне застосування зазначеного методу спочатку до заданої системи рівнянь, а потім до підсистем, що виходять у результаті, дозволяє одержати максимально можливу кількість незалежних підсистем і при цьому одержати підсистеми мінімального порядку. Звідси випливає також єдиність розкладу рівнянь на підсистеми і можливість складання групи симетрії, відповідної знайденому розкладанню.

Метод комутуючої матриці було використано також для приведення декількох симетричних матриць до однакового блочно-діагонального вигляду. Це дозволяє зменшити число невідомих при рішенні задач напівозначеного програмування. Збереження симетричності матриць досягається завдяки правилу: матриця перетворення має бути ортогональною.

У **третьому розділі** розглянуто один зі способів подальшого спрощення системи рівнянь — одночасне приведення декількох матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду. Такий спосіб спрощення називають ієрархічною, вертикальною, послідовною декомпозицією або застосовують термін «звідність». Приведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду дозволяє перетворити вихідну систему рівнянь до допоміжних підсистем меншого порядку, які є еквівалентними вихідній системі рівнянь із погляду стійкості руху. Якщо матриці коефіцієнтів несиметричні, то число таких допоміжних підсистем може бути більше, ніж при «звичайній» декомпозиції. Для рівнянь, що описують коливання механічних систем, несиметричність матриць коефіцієнтів обумовлена наявністю неконсервативних позиційних або гіроскопічних сил.

Розглядається перетворення $\tilde{B}_v = HB_vS$ коефіцієнтів системи (2) до блочно-трикутного вигляду. Нехай перетворення виконано, й перетворена система має вигляд:

$$\tilde{B}_1\ddot{\mathbf{y}} + \tilde{B}_2\dot{\mathbf{y}} + \tilde{B}_3\mathbf{y} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

де

$$\tilde{B}_v = HB_vS = \begin{bmatrix} B_{v11} & B_{v12} & \dots & B_{v1p} \\ 0 & B_{v22} & \dots & B_{v2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{vpp} \end{bmatrix}.$$

Допоміжні системи рівнянь складемо із блоків матриць $\tilde{B}_{vjj}$, що стоять на головній діагоналі:

$$B_{1jj}\ddot{\mathbf{z}}_j + B_{2jj}\dot{\mathbf{z}}_j + B_{3jj}\mathbf{z}_j = \mathbf{0},\ j = \overline{1,p}. \tag{13}$$

**Теорема 3.1.** *Розв'язки початкової системи рівнянь є асимптотично стійкими тоді і тільки тоді, коли асимптотично стійкими є розв'язки всіх допоміжних систем (13).*

Далі розглядаємо перетворення не трьох, а довільного числа матриць. Як зазначено в розділі 2, це може знадобитися у випадку, коли матриці залежать від параметрів.

Ієрархічна декомпозиція може дати додаткове (стосовно декомпозиції на незалежні підсистеми) спрощення тільки у випадку несиметричних матриць. Про це свідчить така теорема.

**Теорема 3.2.** *Якщо матриці $B_v$, $v = \overline{1,d}$, є симетричними і приводяться одночасно до блочно-трикутного вигляду через перетворення подібності, то вони приводяться і до блочно-діагонального вигляду з такою самою кількістю блоків на головній діагоналі.*

Розглянемо спочатку питання щодо приведення матриць до вигляду (12) перетворенням подібності, тобто у випадку, коли $H = S^{-1}$.

**Теорема 3.3.** *Якщо ранг централізатра $\Lambda(B_v)$ матриць $B_v$ більший за одиницю: $r > 1$, то матриці $B_v$ може бути приведено до блочно-трикутного вигляду.*

Умова $r > 1$ не є необхідною для приведення матриць до блочно-трикутного вигляду. Необхідні й достатні умови, які застосовуються для побудови обчислювальних алгоритмів, наведено нижче.

Перетворення $HB_vS$ є більш загальним, ніж перетворення подібності.

Нехай $l'(B_v, S)$ — кількість блоків на головній діагоналі матриць $\tilde{B}_v = S^{-1} B_v S$, приведених до блочно-діагонального вигляду, а $l(B_v) = \max\limits_{S:\det S \neq 0} l'(B_v, S)$, тоді справедливою є така теорема.

**Теорема 3.4.** *Дано матриці* $B_v$, $v = \overline{1, d}$, *причому* $B_1 = E$, *тоді* $l(NB_v) \leq l(B_v)$, *де N — будь-яка неособлива матриця.*

Отже, для знаходження перетворення (12) з максимально можливою кількістю блоків на головній діагоналі достатньо розв'язати таку задачу за допомогою перетворення подібності для допоміжних матриць $C_v = B_1^{-1} B_{v+1}$, $v = \overline{1, \mu}$, $\mu = d - 1$. Розглядається випадок, коли матриця $B_1$ є неособливою.

Для приведення матриць $B_v$ до блочно-трикутного вигляду необхідно знайти їхній загальний нетривіальний інваріантний підпростір, тобто підпростір, інваріантний щодо всіх матриць одночасно.

Для подальших міркувань нам знадобиться алгебра, що породжена матрицями $E$, $B_v$, $v = \overline{1, \mu}$. Позначимо її $\varphi(B_v)$. Для можливості приведення матриць $B_v$ до блочно-трикутного вигляду необхідно і достатньо, щоб ранг $r$ алгебри $\varphi(B_v)$ був меншим, ніж $n^2$.

Далі використовуємо ланцюжок теорем Веддерберна, Артина, Емі Нетер та інших. З них випливає: алгебра, що приводиться, може бути напівпростою або ненапівпростою. Розглядається випадок, коли дані матриці не приводяться до блочно-діагонального вигляду (якби приводилися, то це було б уже зроблено). Тому алгебра є ненапівпростою.

**Теорема 3.5.** *Якщо для даних матриць* $\{(B_v)\}$ *ранг* $r$ *алгебри* $\varphi(B_v)$ *є меншим ніж* $n^2$, *і централізатор* $\Lambda(B_v)$ *не містить жодної матриці* $X$ *із різними власними числами, то алгебра* $\varphi(B_v)$ *є ненапівпростою.*

Ненапівпроста алгебра має нетривіальний радикал. Для його знаходження є розрахункові формули: координати $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}$ будь-якого елемента радикала в цьому базисі задовольняють рівнянню

$$D\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0},$$

де $D = \{d_{ij}\}$, $d_{ij} = \mathrm{Sp}(W_i W_j)$, Sp — слід матриці.

Назвемо Z-***множиною*** переріз ядер усіх елементів радикала алгебри $\varphi(B_v)$. Іншими словами — це множина, що перетворюється в нуль усіма матрицями радикала. Знайти Z-*множину* (її базис) можна як загальний розв'язок відповідної системи алгебраїчних рівнянь.

**Теорема 3.6.** Z-*множина є підпростором простору* $\mathbb{C}^n$.

**Теорема 3.7.** *Якщо алгебра є ненапівпростою, то Z-множина є нетривіальним підпростором.*

**Теорема 3.8.** *Z-множина є інваріантним підпростором щодо матриць* $\{(B_v)\}$.

Шукану матрицю перетворення $S$ формуємо з векторів базисів цього підпростору й ортогонального доповнення до нього, розташовуючи вектори як стовпці.

Таким чином, за допомогою радикала алгебри $\varphi(B_v)$ можна знайти інваріантний щодо матриці $B_v$ підпростір і побудувати матрицю перетворення $S$.

Застосовуючи викладений прийом спочатку до початкових матриць, потім до отриманих діагональних блоків, одержуємо максимально можливу кількість блоків на головній діагоналі.

Докладний опис алгоритму приводиться для випадку, коли приведення матриць до блочно-діагонального вигляду є неможливим. Інакше його слід виконати методами, описаними в розділі 2.

1. Перший крок — складання алгебри матриць $\varphi(B_v)$, породженої матрицями $E$, $B_1$, $B_2$, …, $B_\mu$. Це можна зробити в такий спосіб:

а) вводимо $B_0 = E$;

б) обираємо базис у множині матриць $\{B_{k-1}\}$, $k = \overline{1, \mu+1}$. Для цього можна звернутися до програми SLAU5. Нові матриці базису позначимо $W_1$, …, $W_\mu$;

в) обчислюємо добутки $W_jW_k$, перевіряємо для кожного з них: чи є він лінійною комбінацією матриць $\{W_k\}$. Якщо ні, то оголошуємо добуток новим елементом множини $\{W_k\}$. Для цього

(i) вважаємо $r = \mu$;

(ii) $j = 1$;

(iii) $k = 1$;

(iv) обчислюємо $Z = W_jW$, перевіряємо лінійну залежність матриць $W_1$, $W_2$, …, $W_r$, $Z$ (за допомогою програми SLAU5). Якщо вони є лінійно незалежними, вважаємо $r := r + 1$, $W_r = Z$ і вертаємося до п. (*ii*);

(v) $k = k + 1$, якщо $k \le r$ переходимо до п. (*iv*);

(vi) $j = j + 1$, якщо $j \le r$ переходимо до п. (*iii*).

Для економії машинного часу можна запам'ятовувати такі комбінації $j$ і $k$, для яких п. (*iv*) виконувався, і, у випадку збільшення числа $r$, повторно не робити обчислення п. (*iv*) для цих комбінацій. У результаті розрахунків одержимо базис $W_1$, $W_2$, …, $W_r$. Зрозуміло, що $r \le n^2$.

2. Якщо $r = n^2$, то, як було зазначено вище, приведення матриці $B_v$ до блочно-трикутного вигляду є неможливим. Якщо ж $r < n^2$, то приведення є можливим за допомогою радикала алгебри, оскільки розглядається випадок, коли приведення до блочно-діагонального вигляду (якщо таке можливо для початкових матриць) вже виконано.

Алгоритм складання матриці перетворення $S$ є таким.

(i) будуємо алгебру $\phi(B_v)$ (див. вище);

*(ii)* складаємо матрицю $D$

$$D = \begin{bmatrix} \mathrm{Sp}(W_1W_1) & \dots & \mathrm{Sp}(W_1W_r) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \mathrm{Sp}(W_rW_1) & \dots & \mathrm{Sp}(W_rW_r) \end{bmatrix}$$

і вирішуємо за допомогою програми SLAU5 систему рівнянь $Dy = \mathbf{0}$. Нехай $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(p)}$ — лінійно незалежні розв'язки цієї системи;

(*iii*) вважаємо $g = 0$. Для всіх значень $j$ від 1 до $p$ виконаємо п. (*iv*);

(*iv*) до $g$ рядків, що залишилися після попереднього кроку, додаємо $n$ рядків матриці

$$G = \sum_{k=1}^{r} y_k^{(j)} W_k ,$$

де $y_k^{(j)}$ — елементи вектора $\mathbf{y}^{(j)}$. Далі виключаємо лінійно залежні рядки (програма SLAU5). Нове число лінійно незалежних рядків позначаємо через $g$;

(*v*) за програмою SLAU5 знаходимо загальний розв'язок системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Матриця коефіцієнтів цієї системи рівнянь складається з лінійно незалежних рядків, обчислених у п. (*iii*), (*iv*). Знайдені вектори базису в множині розв'язків позначаємо: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$;

(*vi*) до векторів $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ додаємо вектори, знайдені в п. (*iii*), (*iv*). З отриманих векторів-стовпців складаємо матрицю $S$.

К о м е н т а р і .

1. Пункти (*iii*), (*iv*) і (*v*) відповідають розв'язанню системи рівнянь

$$\begin{cases} G^{(1)}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \\ G^{(2)}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \\ \quad \dots \\ G^{(k)}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

2. Пункт (*vi*) відповідає доповненню базису $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$ підпростору $L$ до базису всього простору $\mathbb{C}^n$. Це пояснюється тим, що: а) ці вектори є лінійно незалежними, б) вони відігравали роль рядків матриці коефіцієнтів при знаходженні векторів $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$.

Складено обчислювальні алгоритми і комп'ютерні програми щодо реалізації розробленого методу.

Отже, задачу приведення декількох матриць до блочно-трикутного вигляду вирішено. Отримано результати з ієрархічної декомпозиції для конкретної механічної системи.

У **четвертому розділі** розглянуто «ідеальний» випадок, коли систему рівнянь обов'язково може бути зведено до окремих рівнянь. У цьому випадку за допомогою власних векторів матриці складаються ефективні розрахункові формули для аналізу форм коливань складних систем, розв'язання задач оптимізації, для оцінки області притягання розв'язків, а також для аналізу макроекономічних систем.

Приведення рівнянь руху неконсервативної механічної системи до окремих рівнянь можливо при використанні перетворення фазових координат, тобто спільного перетворення координат і швидкостей. У цьому випадку рівняння приводять до нормальної форми Коші: $\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in R^m$. Якщо $A$ — матриця простої структури, то ці рівняння приводяться заміною змінних $\mathbf{u} = S\,\boldsymbol{\rho}$ до окремих рівнянь першого порядку $\dot{\rho}_k = \lambda_k \rho_k$, $k = \overline{1, m}$. Тут $S$ — матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $A$. Змінні $\rho_k$ називають *головними* (власними, нормальними) *фазовими координатами*.

Розв'язки отриманих рівнянь — це *головні коливання* (*головні рухи*) досліджуваної системи. Загальний розв'язок вихідної системи рівнянь має вигляд: $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{a}_k$, де $\mathbf{a}_k$ — власні вектори матриці $A$; $c_k$ — вільні змінні, що залежать від початкових умов. Тому у випадку неконсервативної системи *формами коливань* називають власні вектори $\mathbf{a}_k$ матриці $A$, а *коефіцієнтами розподілу амплітуд* — елементи цих векторів (іноді — абсолютні величини цих елементів).

Головні фазові координати використано також і для стабілізації неконсервативних коливальних систем методами теорії керування та чутливості. У цьому випадку розглядається така система рівнянь: $\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{y})\mathbf{x}$, де $\mathbf{y}$ — вектор змінних параметрів $\left(\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\right)$. Потрібно мінімізувати функцію мети $L(\mathbf{y})$, що дорівнює найбільшій дійсній частині власних чисел матриці $A(\mathbf{y})$, тобто знайти $\min_{\mathbf{y}} L(\mathbf{y})$, де $L(\mathbf{y}) = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$.

Чисельне розв'язання такої задачі оптимізації вимагає багаторазового визначенням власних чисел матриць, що мають порівняно високі порядки. Розв'язання цієї задачі можна спростити, якщо обчислювати градієнт функції мети і матрицю других похідних (матрицю Гессе) за допомогою головних фазових координат системи. Додаткове підвищення ефективності методу розрахунків здійснюється шляхом подолання проблеми яружності, викликаної рівністю дійсних частин перших двох пар власних чисел.

У роботі отримано оцінку області притягання розв'язку рівнянь руху за допомогою власних чисел матриці коефіцієнтів першого наближення. При дослідженні складних механічних систем запас стійкості нерідко характеризується величиною $h = -L$, де $L = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k$, $\lambda_k$ — власні числа матриці рівнянь першого наближення. Природнім є припущення про те, що при зміні параметрів механічної системи з метою збільшення числа $h$ ми одночасно домагаємося збільшення області притягання розв'язку. Задачу про одержання оцінки цієї області за допомогою числа $h$ поставлено В. А. Лазаряном і його співробітниками.

Розглядається система рівнянь $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+\mathbf{F}(\mathbf{x})$, де $\mathbf{x}$ — $n$-мірний дійсний вектор; $A$ — постійна дійсна матриця порядку $n$; $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(\mathbf{x})\ F_2(\mathbf{x})\ \ldots\ F_n(\mathbf{x})]^{\mathrm{т}}$ — вектор-функція, т — знак транспонування. Вважаємо, що функції $F_k(\mathbf{x})$ визначено в деякій області $D$, що містить початок координат. Крім того, в області $D$ виконується нерівність $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \le M \cdot \|\mathbf{x}\|^{1+\alpha}$, де $M$ і $\alpha$ — додатні числа; $\|\cdot\|$ — евклідова норма: $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_k |x_k|^2$.

Отримано формули, що визначають оцінку області притягання нульового розв'язку, тобто такої області, що всі траєкторії, які починаються в її точках, прагнуть до початку координат.

Для випадку, коли матриця $A$ має просту структуру і область $D$ є досить великою, отриманий результат можна сформулювати так: якщо для системи рівнянь виконуються умови теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням, то будь-який розв'язок цієї системи з початковими умовами $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, що задовольняють нерівності

$$\mathbf{x}_0^*\left(P^{-1}\right)^* P^{-1}\mathbf{x}_0 < \left(\frac{-\max \operatorname{Re}\lambda_k}{\left\|P^{-1}\right\| \cdot M \cdot \|P\|^{1+\alpha}}\right)^{2/\alpha},$$

прагне до нуля (тут $\lambda_i$ — власні числа матриці $A$; $n$ — порядок матриці; $P$ — матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці $A$).

Отримано також результат для випадку, коли матриця $A$ має непросту структуру.

У **п'ятому розділі** наведено результати практичних застосувань розробленого в дисертації обчислювального підходу до декомпозиції рівнянь, призначених для дослідження стійкості руху моделей високошвидкісних рейкових екіпажів.

При моделюванні руху рейкових екіпажів, як правило, враховуються сили крипу: горизонтальні сили взаємодії між колесами і рейками. У цьому випадку система диференціальних рівнянь виходить громіздкою навіть за лінійною постановою задачі. Вдало виконана декомпозиція рівнянь дозволяє в ряді випадків зробити розв'язок більш простим і наочним, а також полегшити застосування методів, що вимагають багаторазового виконання розрахунків при різних значеннях параметрів.

Застосовано спосіб комутуючої матриці до системи рівнянь, що описує рух чотиривісного вагона з подвійним ресорним підвішуванням (рис. 1).

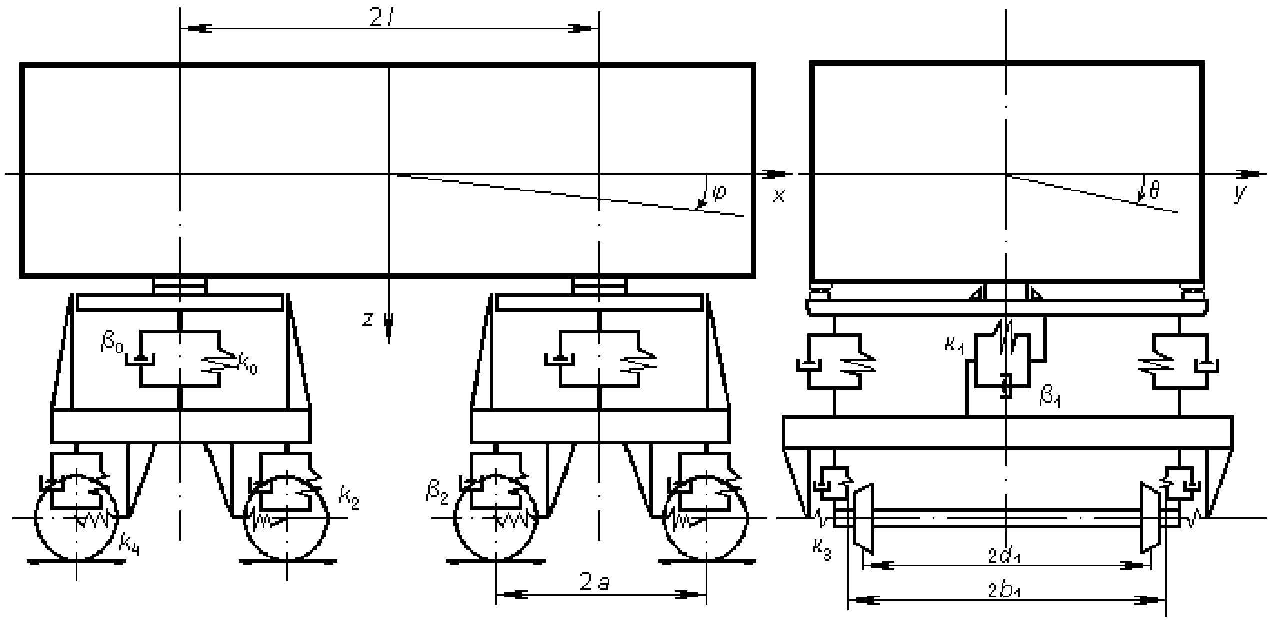


Рис. 1. Розрахункова схема вагона з подвійним ресорним підвішуванням

При розгляді конструкції рейкового екіпажа із пружно-дисипативними зв'язками між рамами візків і кузовом отримано, що вихідну систему 34-го порядку може бути приведено до двох підсистем 32-го і 2-го порядків і доведено, що подальше розщеплення отриманих підсистем є неможливим. При відсутності пружно-дисипативних зв'язків між рамами візків і кузовом система 34-го порядку приводиться до трьох підсистем 18-го, 14-го і 2-го порядків. У цьому випадку також подальше розщеплення отриманих підсистем є неможливим.

При дослідженні стійкості руху восьмивісного напіввагона з несиметричним завантаженням беруться до уваги такі його координати:

$$y,\ \psi,\ \theta_{к1},\ \theta_{к2},\ \theta_{c1},\ \theta_{c2},\ \psi_{c1},\ \psi_{c2},\ y_{бi},\ \psi_{бi},\ \psi_i\ (i = 1, 2, 3, 4),$$

де $y$, $\theta$, $\psi$ позначають відповідно бічний зсув і кути бічної хитавиці та виляння, індекси $k_1$ і $k_2$ стосуються частин кузова, $c_i$ — сполучних балок, $б_i$ — бічних рам візків, $i$ — надресорних балок.

У результаті розрахунків одержуємо такі три множини узагальнених координат:

$$\psi c_1,\ y_{б1} - y_{б2},\ \psi_{б1} - \psi_{б2},\ \psi_1 - \psi_2;$$
$$\psi c_2,\ y_{б3} - y_{б4},\ \psi_{б3} - \psi_{б4},\ \psi_3 - \psi_4;$$
$$y,\ \psi,\ \theta_{к1},\ \theta_{к2},\ \theta_{c1},\ \theta_{c2},\ y_{б1} + y_{б2},\ y_{б3} + y_{б4},\ \psi_{б1} + \psi_{б2},\ \psi_{б3} + \psi_{б4},\ \psi_1 + \psi_{2,}\ \psi_3 + \psi_4.$$

Кожному із цих наборів відповідає окрема система рівнянь. Доведено, що подальший поділ на підсистеми вже є неможливим.

Системи рівнянь, що відповідають першій і другій множинам координат, відрізняються одна від одної тільки коефіцієнтами псевдоковзання. Тому можна враховувати лише одну з них — ту, коефіцієнт псевдоковзання якої є меншим.

Виконано також вибір узагальнених координат локомотива із трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми. Дванадцятивісний локомотив типу ВЛ15 або ВЛ65 має дві шестивісні секції, у кожній з яких кузов опирається на три двовісні візки. Перший і останній візки кожної секції мають ідентичну конструкцію ресорного підвішування. Тут при горизонтальному поперечному переміщенні візків щодо кузова відновлювальні сили забезпечуються колисковим ресорним підвішуванням. Воно створює також відновлюючий момент при вилянні (повороти в горизонтальній площині) візків щодо кузова. Для того, щоб забезпечити значні горизонтальні переміщення середніх візків щодо кузова при проходженні кривих, кузов опирається на середні візки за допомогою хитних опор із пружними елементами.

Систему диференціальних рівнянь 66-го порядку розділено на підсистеми 10-го, 8-го, 32-го і 16-го порядків. При наявності пружних елементів, що перешкоджають поворотам візків у горизонтальній площині щодо кузова, рівняння руху локомотива розділяються лише на дві підсистеми 18-го і 48-го порядків.

Вирішено задачу з визначення форм коливань восьмивісної цистерни, розрахункову схему якої представлено у вигляді механічної системи з 23-х твердих тіл, у тому числі котла з «замороженою» рідиною.

Було знайдено оптимальні параметри електровоза ВЛ-80 з погляду стійкості руху. При цьому використовувалися розроблені автором способи подолання проблеми яружності, викликаної рівністю дійсних частин перших двох пар власних чисел.

У **шостому розділі** наведено результати щодо декомпозиції рівнянь руху екіпажа високошвидкісного наземного транспорту (ВШНТ) на електромагнітному підвісі та щодо аналізу форм коливань шляхової структури ВШНТ.

Виконано розщеплення рівнянь руху екіпажа ВШНТ із чотирма візками (рис. 2). При дослідженні стійкості руху цього екіпажа беруться до уваги наступні узагальнені координати:

$$\psi, y, \theta, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, y_1, y_2, y_3, y_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{44}.$$

Координати без індексу позначають зсуви і кути повороту кузова, з одним індексом — зсуви й кути повороту відповідних візків, $y_{kj}$ — бічний зсув $j$-го магніту, укріпленого на $k$-му візку.

У диференціальні рівняння входять також величини струмів в електромагнітах $i_{kj}$. Система рівнянь має 78-й порядок.

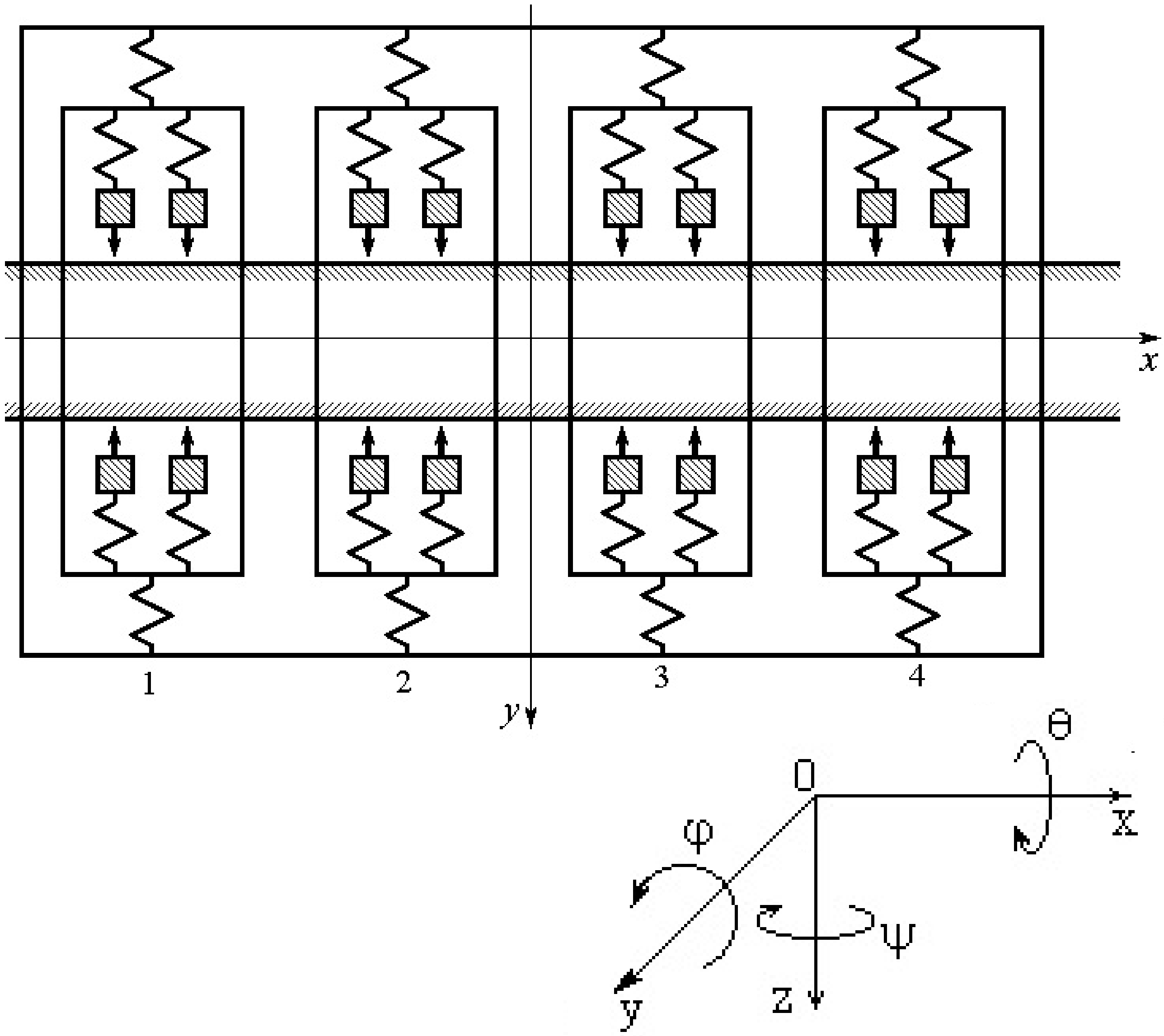


Рис. 2. Розрахункова схема екіпажа ВШНТ на електромагнітному підвісі

Симетрія екіпажа ВШНТ проявляється в тому, що його розрахункова схема залишається незмінною за наступними перетвореннями: $g_1$ — відображення всієї системи щодо вертикальної поперечної площини $Oyz$; $g_2$ — відображення щодо поздовжньої площини $Oxz$; $g_3$ — поворот на 180° навколо осі $Oz$; $g_4$ — тотожне перетворення. Ці перетворення утворюють групу $G$ симетрії екіпажа ВШНТ.

У результаті розрахунків одержуємо, що система рівнянь 78-ого порядку розпадається на чотири підсистеми, що мають порядки 12, 12, 28 і 26.

Досліджено форми коливань шляхової структури ВШНТ на електромагнітному підвісі.

У **сьомому розділі** обговорюється можливість застосування методів декомпозиції в економічних задачах.

Розглянуто спочатку статичний баланс багатопродуктової економіки: $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор випуску, що характеризує випуск продуктів за рік; $A = \| a_{ij} \|$ — матриця прямих витрат; $a_{ij}$ — кількість продукту

$i$-тої галузі, що витрачається для виробництва одиниці продукції $j$-тої галузі; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор кінцевих продуктів; $b_i$ — кількість продукту $i$-тої галузі, що виступає в якості кінцевого результату виробничої діяльності за рік; т — знак транспонування. Звідси випливає, що $\mathbf{x} = C\,\mathbf{b}$, де $C = (E - A)^{-1}$. Матрицю $C$ називають матрицею повних витрат.

Для докладного аналізу моделі розглянемо власні числа $\lambda_\iota$ і власні вектори $\mathbf{s}_i$ матриці $C$. Далі розглядається випадок, коли матриця $C$ має просту структуру, тобто їй відповідає діагональна жорданова форма. Нехай $S$ — матриця, стовпцями якої є власні вектори $\mathbf{s}_i$. Робимо заміну змінних $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$; $\mathbf{b} = S\mathbf{d}$ у рівняннях і одержуємо систему незалежних рівнянь: $y_i = \lambda_i d_i$, $i = \overline{1, n}$. Вектор $\mathbf{s}_i$ будемо трактувати як комплекс виробництв. Власні числа в такому випадку характеризують «коефіцієнт корисної дії» комплексу. Якщо коефіцієнт є малим, то комплекс «працює» ефективно, тобто для одержання результуючої продукції $i$-го комплексу немає необхідності в значному надвиробництві цієї продукції.

Виконано розрахунки за статистичним даними СРСР і України.

Розроблено метод для найкращого поділу на блоки матричних макроекономічних моделей. Деякі макроекономічні моделі описують міжгалузевий баланс за допомогою декількох матриць. У цьому випадку неможливо застосувати підхід, що використовує власні вектори матриці. Однак може існувати перетворення змінних, що дозволяє розділити рівняння на кілька незалежних підсистем. Якщо такий поділ є можливим, то отримані підсистеми описують деякі «блоки» (або «комплекси») видів продукції і технологічних способів. Кожен із них можна аналізувати окремо від інших. Отримано необхідні і достатні умови існування такого перетворення. Створено алгоритми виконання відповідних розрахунків. Як приклад було розглянуто аналіз моделі Неймана за допомогою методів точної декомпозиції.

Модель Неймана записується в такий спосіб:

$$\mathbf{u} = A\mathbf{x},\ \mathbf{v} = B\mathbf{x}, \tag{14}$$

де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор інтенсивностей використання технологічних способів, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ — вектор витрат, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ — вектор випуску продукції, $A$ і $B$ — матриці розмірності m×n. У даній роботі розглядається задача знаходження такої заміни змінних

$$\mathbf{x} = S\mathbf{x}',\ \mathbf{v} = H\mathbf{v}',\ \mathbf{u} = H\mathbf{u}', \tag{15}$$

після якої систему (14) буде наведено до максимально можливої кількості незалежних підсистем меншого порядку. Тут $\mathbf{x}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{u}'$ — вектори нових змінних. Після перетворення матриці набудуть вигляд: $\hat{A} = H^{-1}AS$, $\hat{B} = H^{-1}BS$.

Аналогічно попередньому одержуємо, що $H = v(T_1)$, $S = v(T_2)$. Тут $T_1$ і $T_2$ — розв'язок системи матричних рівнянь $T_1A = AT_2$, $T_1B = BT_2$, $v(X)$ — матриця, стовпцями якої є вектори канонічного базису (власні і приєднані вектори) матриці $X$. При цьому хоча б одна з матриць $T_k$ повинна мати не менше двох різних власних чисел, інакше декомпозиція є неможливою.

Роль допоміжних матриць відіграють:

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_3 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, задача про знаходження перетворення (15) для розщеплення рівнянь (14) зводиться до задачі одночасного приведення допоміжних матриць до блочно-діагонального вигляду через перетворенням подоби. Розв’язання цієї задачі наведено вище (способи А, Б, теореми 2.1, 2.2).

Аналогічним чином можна виконати аналіз інших макроекономічних моделей, що використовують декілька матриць, наприклад, динамічної моделі Леонтьєва, балансової моделі однієї галузі та інші. У всіх цих випадках можливість або неможливість декомпозиції залежить від структури досліджуваної економічної системи. Тому розроблений підхід можна трактувати як виявлення прихованої симетрії системи, а наближену декомпозицію — як виявлення прихованого малого параметра в економічних системах.

## ВИСНОВКИ

1. На основі аналізу публікацій вітчизняних і закордонних авторів встановлено існування різних напрямків у створенні методів декомпозиції матричних математичних моделей.
2. Запропоновано концепцію, що погоджує різні напрямки в єдине ціле. Це дозволяє більш ефективно вирішувати прикладні задачі.
3. Розроблено теоретичні основи й обчислювальні методи для найкращої декомпозиції лінійних рівнянь через приведення матриць коефіцієнтів до блочно-діагонального вигляду без вимоги про напівпростоту застосовуваних алгебр, скінченності або компактності групи симетрії.
4. Розроблено спосіб виявлення систем, близьких до розщеплюваних систем. Це дозволяє звести початкову задачу до задачі з малим параметром.
5. Встановлено відповідність між задачею декомпозиції керованих систем, описуваних прямокутними матрицями і задачею декомпозиції механічних систем.
6. Встановлено взаємозв’язки між методами, що використовують апріорну інформацію щодо симетрії розрахункової схеми системи, й алгебраїчними методами декомпозиції.
7. Розроблено метод ієрархічної декомпозиції за допомогою приведення матриць до блочно-трикутного вигляду.
8. Розроблено алгоритми для спрощення математичних моделей, що призначені для аналізу задач:

- ♦ дослідження стійкості руху рейкових екіпажів,

- дослідження руху екіпажів на електромагнітному підвішуванні,
- дослідження еволюції керованих систем,
- дослідження макроекономічних моделей Леонтьєва і Неймана,
- напівозначеного програмування.

9. Щодо ряду запропонованих моделей виконано практичні розрахунки, що показали ефективність застосовуваних методів для розв'язання актуальних прикладних задач механіки й економіки.

10. Рекомендується така послідовність застосовування методів, які розроблені в дисертації:

a) спочатку методи теорії груп, які використовують інформацію щодо симетрії розрахункової схеми;
b) далі зведення до максимально можливої в допустимому класі перетворень кількості незалежних підсистем;
c) далі методи перевірки: чи є розглянута система близькою до розщеплюваної;
d) останнім — зведення матриць коефіцієнтів до блочно-трикутного вигляду (ієрархічна декомпозиція).

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Базилевич Ю. Н.* Численные методы декомпозиции в линейных задачах механіки / Ю. Н. Базилевич. — Киев: Наук. думка, 1987. — 156 с.
2. *Базилевич Ю. Н.* Разделение на подсистемы уравнений возмущенного движения восьмиосного вагона с несимметричной загрузкой / Ю. Н. Базилевич // Динамика и прочность сложных механических систем. – Киев: Наук. думка, 1977. — С. 24—27.
3. *Базилевич Ю. Н.* О применении методов теории чувствительности для стабилизации сложных динамических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татаринова // Теория инвариантности и её применение. Ч. 2. — Киев: Наук. думка, 1979. — С. 16—21.
4. *Базилевич Ю. Н.* Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых підсистем / Ю. Н. Базилевич // Дифференц. уравнения. — 1980. — 16, № 2. — С. 360-361.
5. *Базилевич Ю. Н.* Оптимизация параметров рельсовых экипажей по различным целевым функціям / Ю. Н. Базилевич, Н. А. Радченко // Нагруженность, прочность, устойчивость движения механических систем. — Киев: Наук. думка, 1980. — С. 48—52.
6. *Базилевич Ю. Н.* Оценка области притяжения решения уравнений движения с помощью собственных чисел / Ю. Н. Базилевич // Колебания и динамические качества механических систем. — Киев: Наук. думка, 1983. — С. 14—17.
7. *Базилевич Ю. Н.* Механические характеристики путевой структуры скоростной транспортной системы / Ю. Н. Базилевич // Динамические

характеристики механических систем. — Киев: Наук. думка, 1984. — С. 76—81.

8. *Базилевич Ю. Н.* О боковых колебаниях восьмиосных экипажей / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, М. Б. Кельрих, Л. М. Коротенко // Конструкторско-технологические исследования в области создания металлургического, горнорудного, подъёмно-транспортного оборудования и цистерностроения. — Краматорск: НИИПТмаш., 1985. — С. 90—100.
9. *Базилевич Ю. Н.* Распределение амплитуд колебаний многомассовой существенно неконсервативной системы / Ю. Н. Базилевич, Ю. В. Демин, Л. М. Коротенко // Колебания и прочность механических систем. — Киев: Наук. думка, 1986. — С. 81—87.
10. *Базилевич Ю. Н.* Численные алгоритмы для разделения уравнений на независимые и слабо связанные подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Нагруженность и надежность механических систем. — Киев: Наук. думка, 1987. — С. 53—55.
11. *Базилевич Ю. Н.* Моделирование боковых колебаний четырехосной цистерны с дополнительными упругодиссипативными свіязями / Ю. Н. Базилевич, Ю. П. Бороненко, Ю. В. Демин, Л. М. Коротенко // Проблемы динамики, прочности и устойчивости движения железнодорожного подвижного состава. — Днепропетровск: Изд-во ДИИТ, 1986. — С. 104—111.
12. *Базилевич Ю. М.* Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, біологічні науки. — 2000. — № 1. — С. 13—16.
13. *Базилевич Ю. Н.* Наилучшее разделение на блоки матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Зб. Наукових пр. — Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2005. — С. 23—28.
14. *Апроянц А. Р.* Различные подходы к задаче нахождения общего инвариантного подпространства нескольких матриц / А. Р. Апроянц, Ю. Н. Базилевич, Н. В. Чехранов // Вісник Дніпропетровського університету. Математика. — 2005. — № 6. — С. 3—6.
15. *Базилевич Ю. Н.* Точная декомпозиция линейных систем [Электронный ресурс] / Ю. Н. Базилевич // Электронный журнал «Исследовано в России», 018, с. 182—190. — 2006. — Режим доступа к ресурсу: http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/MFTI/2006/018.pdf.
16. *Bazilevich Yu. N.* The Simultaneous Reduction of Matrices to the Block-Triangular Form / Yu. N. Bazilevich [E-resource] // Physics Journal. — 2015. Vol. 1, No. 2, pp. 54—61. Access to the resource: http://files.aiscience.org/journal/article/html/70400061.html.
17. *Базилевич Ю. Н.* Новые вычислительные алгоритмы в задачах точной декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Д.: РВВ ДНУ, 2015. — Вип. 15. — С. 3—8.

18. *Базилевич Ю. Н.* Об упрощении задачи полуопределенного программирования / Ю. Н. Базилевич // Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. пр. — 2016. — № 15. — С. 103—107.
19. *Базилевич Ю. Н.* Расщепление уравнений движения экипажа на электромагнитном подвешивании / Ю. Н. Базилевич // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2016. — № 1. — С. 5—11.
20. *Базилевич Ю. Н.* Оценка области притяжения решения в случае системы уравнений высокого порядка / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. № 25. — Д.: ДНУ, 2016. — С. 18—26.
21. *Базилевич Ю. Н.* Группа симметрии декомпозируемой системы / Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. — 2016. — Вип. 1 (20). — С. 3—10.
22. *Базилевич Ю. Н.* О постановке задач точной декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, И. А. Костюшко // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2017. — № 1. — С. 77—82.
23. *Базилевич Ю. Н.* Наилучшее приведение матриц к блочно-треугольному виду для задач иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 145—153.
24. *Базилевич Ю. Н.* Приближённая декомпозиция как приём оценки демпфирования колебательных систем / Ю. Н. Базилевич, Р. Б. Грановский, Н. Я. Гаркави, Е. Ф. Фёдоров, В. В. Карпенко, О. Н. Литвиненко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. — Дніпро: Ліра, 2017.— Вип. 26. — С. 22—33.
25. *Базилевич Ю. Н.* Оптимизация параметров рельсовых экипажей с точки зрения устойчивости движения / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, Н. А. Радченко // Всесоюзная конференция по оптимальному управлению в механических системах. Тезисы докладов. — Казань: Изд. КАИ, 1977. — С. 9-10.
26. *Базилевич Ю. Н.* Приведение набора матриц к блочно-треугольному виду с максимальным количеством блоков / Ю. Н. Базилевич // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть первая. — Львов: Изд-во ИППММФ АН УССР, 1987. — С. 18.
27. *Базилевич Ю. Н.* Расщепление уравнений боковых колебаний рельсового экипажа на подсистемы / Ю. Н. Базилевич // Проблемы механики железнодорожного транспорта. Тезисы докл. Всесоюзной конф. — Днепропетровск: ДИИТ, 1988. — С. 42.
28. *Базилевич Ю. Н.* Декомпозиция уравнений при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // Восьмая конференция «Проблемы механики железнодорожного транспорта». Тезисы докладов конференции. — Днепропетровск: ДИИТ, 1992. — С. 23.
29. *Базилевич Ю. Н.* Компьютерная декомпозиция уравнений движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич // IX Международная конференция:

Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надежность и безопасность подвижного состава. Тезисы докладов конференции. — Днепропетровск: Днепропетр. гос. технич. ун-т ж. д. транспорта, 1996. — С. 148-149.

30. *Базилевич Ю. Н.* О методах анализа матричных моделей стоимостного баланса / Ю. Н. Базилевич, В. А. Нецветаев, Е. П. Резник // XXI столетие — проблемы и перспективы освоения месторождений полезных ископаемых: Сб. науч. трудов НГА Украины. № 3, том. 7. — Днепропетровск: РИК НГА Украины, 1998. — С. 194—196.
31. *Базилевич Ю. Н.* Алгоритм нахождения общего решения системы линейных однородных алгебраических уравнений в случае сверхбольшой разреженной матрицы коэффициентов / Ю. Н. Базилевич, А. Л. Булдович // Математические модели и современные технологии. Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. — Киев, 1998. — С. 12, 13.
32. *Базилевич Ю. Н.* Последовательная декомпозиция уравнений при исследовании устойчивости движения рельсовых экипажей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Проблемы механики железнодорожного транспорта: Динамика, надёжность и безопасность подвижного состава. X Международная конференция. Тезисы докладов. — Днепропетровск: Арт-Пресс, 2000. — С. 130-131.
33. *Базилевич Ю. Н.* Численное решение задач иерархической декомпозиции линейных математических моделей / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Міждержавна науково-методична конференція «Комп'ютерне моделювання». — Дніпродзержинськ, ДзДТУ, 2001. — С. 45-46.
34. *Базилевич Ю. Н.* Методы точной декомпозиции при анализе динамической модели Леонтьева / Ю. Н. Базилевич, И. В. Швец // Міждержавна науково-методична конференція «Проблеми математичного моделювання». — Дніпродзержинськ, ДзДТУ, 2002. — С. 7.
35. *Базилевич Ю. Н.* Выявление симметрии и условной симметрии системы вычислительными методами / Ю. Н. Базилевич // IX Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл. / Таврический национальный ун-т. — Симферополь, 2008. — С. 17.
36. *Bazilevich Yu. N.* Similarity transformation of the pair of matrices to the best partitioned-triangular form / Yu. N. Bazilevich // 7-а міжнародна алгебраїчна конференція в Україні: тези доповідей. — Київ, Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 21.
37. *Базилевич Ю. Н.* Методы декомпозиции при анализе матричных макроэкономических моделей / Ю. Н. Базилевич // X Крымская международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл. / Таврический национальный ун-т. — Симферополь, 2010. — С. 13.
38. *Базилевич Ю. Н.* Новые алгоритмы иерархической декомпозиции / Ю. Н. Базилевич // Информационные технологии в управлении сложными

системами. Сборник докладов научной конференции. — Днепропетровск: Изд-во «Свидлер А. Л.», 2011. — С. 8—10.

39. *Базилевич Ю. Н.* Декомпозиция уравнений с прямоугольными матрицами коэффициентов / Ю. Н. Базилевич // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): межд. конф / Таврический нац. ун-т. — Симферополь, ДИАПИ, 2012. — С. 79.
40. *Базилевич Ю. Н.* Точная декомпозиция систем линейных уравнений / Ю. Н. Базилевич // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15—17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 40.
41. *Базилевич Ю. Н.* Методы точной декомпозиции в линейных динамических задачах / Ю. Н. Базилевич // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: міжнародна науково-практична конф. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. — С. 14-15.
42. *Базилевич Ю. Н.* Оптимизация параметров механических систем при овражном характере целевой функции / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татаринова // Динамика и прочность сложных механических систем. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 31—33.
43. *Базилевич Ю. Н.* Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых підсистем / Ю. Н. Базилевич // Рукопись деп. ВИНИТИ 11.05.79 N1973-79 Деп.
44. *Базилевич Ю. Н.* Вычислительный подход к задаче нахождения неприводимых представлений конечной группы / Ю. Н. Базилевич // Прикладные проблемы математического моделирования: Вестник Херсонского государственного технического университета, 1999. — С. 29—31.
45. *Базилевич Ю. Н.* Решение задачи иерархической декомпозиции линейных математических моделей механических систем / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, И. В. Швец // Техническая механика. —2 003. — № 1. — С. 135—140.
46. *Коротенко М. Л.* О работах В. А. Лазаряна в области устойчивости движения рельсовых экипажей и их развитии / М. Л. Коротенко, Ю. Н. Базилевич // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. — Вип. 30. — Д: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2009. — С. 144—149.

## АНОТАЦІЯ

**Базилевич Ю. М. Методи декомпозиції матричних математичних моделей**. — На првах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи — Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Київ, 2018.

Розглянуто питання приведення систем рівнянь високого порядку до окремих підсистем через лінійну заміну змінних. Застосовано як ті методи, що використовують інформацію щодо симетрії відповідної розрахункової схеми, так і ті, що безпосередньо аналізують систему рівнянь. Доведено єдиність розкладання системи рівнянь на підсистеми. Особливу увагу приділено обчислювальній стороні методів, що застосовуються, питанням отримання рішення за допомогою ЕОМ. Розв'язано задачу з визначення систем, близьких до таких, що розщеплюються. Створено метод найкращої ієрархічної декомпозиції систем.

Розглянуто неконсервативні системи, зокрема рейкові екіпажі. Вказано шляхи застосування викладених методів для спрощення рівнянь еволюції систем автоматичного управління і моделей міжгалузевого балансу.

*Ключові слова:* декомпозиція, стійкість руху, лінійна модель, матриця, перетворення подібності, централізатор, блоково-трикутний вигляд, алгебра над полем, радикал.

## АННОТАЦИЯ

**Базилевич Ю. Н. Методы декомпозиции матричных математических моделей.** — На правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности: 01.05.02 — математическое моделирование и вычислительные методы — Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН України, Киев, 2018.

Рассмотрены вопросы приведения систем уравнений высокого порядка к отдельным подсистемам путем линейной замены переменных. Применены как методы, использующие информацию о симметрии соответствующей расчетной схемы, так и непосредственно анализирующие систему уравнений. Доказана единственность разложения системы уравнений на подсистемы. Особое внимание уделено вычислительной стороне применяемых методов, вопросам получения решения с помощью ЭВМ. Решена задача об определении систем, близких к расщепляемым. Создан метод наилучшей иерархической декомпозиции систем.

Рассмотрены неконсервативные системы, в частности рельсовые экипажи. Указаны пути применения изложенных методов для упрощения уравнений движения систем автоматического управления и моделей межотраслевого баланса.

*Ключевые слова:* декомпозиция, устойчивость движения, линейная модель, матрица, преобразование подобия, централизатор, блочно-треугольный вид, алгебра над полем, радикал.

## ABSTRACT

**Bazilevich Yu. N. Decoupling Methods of Matrix Mathematical Models**. — As a manuscript

The Dissertation for the degree of Doctor of physical and mathematical sciences, specialty: 01.05.02 — mathematical modeling and computational methods — V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The problems of bringing systems of equations of high order to the individual subsystems by a linear change of variables have been considered. Both methods using information about symmetry of corresponding calculation model and analyzing the system of equalizations directly have been applied. The uniqueness of the decoupling of the system into subsystems has been proved. Particular attention has been paid to the computing side of the applied methods and to the issues of obtaining of the computer-aided decisions. The problem of determining the systems similar to the splittable ones has been resolved. The methods of hierarchical decoupling of the systems have been created.

Non-conservative systems, in particular rail vehicles, have been considered. The ways of applying of the stated methods to simplify the equations of evolution of the automatic control systems and models of input-output balance have been determined.

*Keywords:* decoupling, stability of movement, linear model, matrix, similarity transformation, centralizer, block-triangular form, algebra over ring, radical.