УДК 531.36+625.2.001:625.03

М. Л. КОРОТЕНКО, д.т.н., профессор, ДИИТ (Украина);
Ю. Н. БАЗИЛЕВИЧ, к.ф.-м.н., ПГАСА (Украина)

О РАБОТАХ В. А. ЛАЗАРЯНА В ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЬСОВЫХ ЭКИПАЖЕЙ И ИХ РАЗВИТИИ

У статті приділена увага деяким положенням у роботах В. А. Лазаряна з дослідження стійкості руху рейкових екіпажів, які стали основними для ряду подальших досліджень.

В статье уделено внимание некоторым положениям в работах В. А. Лазаряна по исследованию устойчивости движения рельсовых экипажей, которые явились основополагающими для ряда последующих исследований.

In the paper an attention is paid to some positions in works of V. A. Lazaryan on studies of stability of motion of rail vehicles, which were a background for a number of further studies.

В научном наследии крупного ученого-механика академика АН УССР В. А. Лазаряна значительное место занимают работы, связанные с исследованием устойчивости невозмущенного движения подвижного состава железных дорог. В его работах [1-8] заложены основы применения теории устойчивости движения, разработанной А. М. Ляпуновым, к исследованию устойчивости движения рельсовых экипажей. В. А. Лазарян строго обосновал вопросы корректного выбора расчётных схем экипажей, составления уравнений возмущённого движения, применения теорем А. М. Ляпунова о первом приближении. Работы В. А. Лазаряна по исследованию устойчивости движения рельсовых экипажей явились основополагающими для ряда последующих исследований.

Не ставя перед собой задачу: сделать обзор работ школы В. А. Лазаряна в области устойчивости движения рельсовых экипажей, остановимся на некоторых положениях его работ в этом направлении, наиболее близких авторам статьи.

Следует отметить, что В. А. Лазарян очень внимательно следил за прикладной направленностью работ, выполняемых в коллективе, которым он руководил. Практически решение задач, связанных с исследованием устойчивости движения локомотивов, началось в 1957 году, когда В. А. Лазарян с группой сотрудников ДИИТа, в которую входили И. Г. Барбас, Е. П. Блохин, Э. З. Воскобойник, М. Л. Коротенко, А. И. Стукалов, выехали на Новочеркасский электровозостроительный завод для определения направления исследований [9]. Кроме этого на завод была направлена группа студентов-дипломников факультета электрификации и вагон-лаборатория, на базе которого был проведен ряд опытов по определению параметров колебаний вновь построенных электровозов.

При постановке задач исследования устойчивости движения рельсовых экипажей В. А. Лазарян большое внимание уделял корректной постановке задачи, в частности, выбору расчётной схемы. Он исходил из того, что расчётную схему надо выбирать так, чтобы она по возможности наиболее полно отражала исследуемые свойства реальной системы [10]. При этом приходится рассматривать рельсовые экипажи как нелинейные механические системы с большим числом степеней свободы. Учёт конечной жёсткости пути, когда приходится рассматривать систему «экипаж-путь», ещё больше усложняет рассматриваемую систему. Конечно, это создавало большие трудности при решении указанных задач, так как в то время основным средством вычислительной техники был арифмометр типа Феликс.

Использование вычислительной техники

В. А. Лазарян всегда уделял большое внимание развитию вычислительной техники и подготовке специалистов ею владеющих. По его инициативе был создан факультет вычислительной техники, приобретались электронные модели непрерывного действия (МПТ-9, ЭМУ-8 и др.) и цифровые вычислительные машины, а при лаборатории динамики и прочности подвижного состава ДИИТа был организован вычислительный центр.

При использовании математических машин непрерывного действия для исследования устойчивости движения оказалось, что для неустойчивых систем переменные быстро возрастают, и выходят за пределы шкалы машины и решение становится невозможным. Поэтому В. А. Лазарян предложил использовать приём сдвига корней [3], при котором выполняется замена переменных $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* e^{\alpha t}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ — векторы физических координат, а α — вещественное число. При этом матрица A исходной системы уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ примет вид $A^* = A - \alpha E$, где E – единичная матрица, а собственные числа матрицы A^* будут равны $\lambda^*_i = \lambda_i - \alpha$. Если принять $\alpha > h_{\max}$, где $h_{\max}$ — наибольшая вещественная часть собственных чисел λ, то система дифференциальных уравнений станет асимптотически устойчивой и её можно решить на аналоговой вычислительной машине. С другой стороны, если от нормальной формы Коши перейти к уравнениям второго порядка, то вместо исходной неустойчивой системы $M\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = \mathbf{0}$ получим систему

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (B + 2\alpha M)\dot{\mathbf{q}} + (C + \alpha B + \alpha^2 M)\mathbf{q} = \mathbf{0},$$

где M, B, C — матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов исходной системы.

Анализ добавок, которые вводятся в систему, позволяет судить о том, как изменить структуру и параметры исходной системы, чтобы её движение стало асимптотически устойчивым. При помощи приёма сдвига корней был получен ряд результатов, в частности определены структура и параметры расчётной схемы четырёхосного полувагона, при которых его движение становится асимптотически устойчивым в широком диапазоне скоростей [9].

Появление цифровых вычислительных машин открыло новые горизонты. Но оказалось, что для нахождения собственных чисел и векторов матриц сравнительно высокого порядка не подходят методы, разработанные для ручного счёта. Была проделана большая работа [11] по проверке и выбору численных алгоритмов, пригодных для решения задач, связанных с исследованием устойчивости движения рельсовых экипажей. Следует заметить, что кроме сравнительно высокого порядка соответствующие матрицы коэффициентов являются несимметричными в связи с наличием в исследуемой системе неконсервативных позиционных сил и характерны наличием близких и кратных собственных чисел, что создаёт проблемы при расчётах. Именно эти особенности исследуемых систем повлияли на выбор методов их анализа и синтеза, привели к необходимости разработки новых теоретических подходов и вычислительных методов.

Численные методы оптимизации

Для стабилизации движения механических систем большие перспективы открывает применение достаточно хорошо разработанных в настоящее время методов оптимизации. Проще всего эта задача решается для систем, движение которых описывается линейными или линеаризованными уравнениями первого приближения по А. М. Ляпунову. В этом случае показателем качества системы с точки зрения устойчивости движения является $h_{\max}$ — максимальная величина вещественных частей собственных чисел матрицы коэффициентов уравнений возмущённого движения системы, причём для устойчивой системы, когда $h_{\max} < 0$, можно считать, что величина $\eta = |h_{\max}|$ характеризует запас устойчивости движения системы. Так как собственные числа в связи с высоким порядком матриц не могут быть получены в общем виде, для их определения и для организации процесса оптимизации необходимо применение численных методов. Поскольку в число параметров, от которых зависит устойчивость движения, входят не только величины, соответствующие конструкционным особенностям рассматриваемого экипажа, но и скорость его движения v, возможны две постановки задачи оптимизации:

1. Определение параметров экипажа, при которых запас устойчивости максимален при заданной скорости движения
2. Определение параметров экипажа, при которых критическая с точки зрения устойчивости движения скорость максимальна при заданной величине запаса устойчивости.

Решением задачи оптимизации параметров рельсовых экипажей в указанной постановке занимались В. А. Лазарян, М. Л. Коротенко, Ю. В. Дёмин, Л. А. Длугач, О. М. Маркова, И. А. Серебряный, Ю. Н. Базилевич [11—17].

В первом варианте в качестве функции цели можно рассматривать

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) = \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i) \quad i = \overline{1, n},$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор варьируемых параметров; λ_i — собственные числа матрицы A линеаризованной системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ уравнений возмущённого движения, и решается задача поиска $Q^* = \min Q(\boldsymbol{\alpha})$.

Во втором варианте целевая функция

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) = v_{кр}(\boldsymbol{\alpha})$$

и решается задача поиска $Q^* = \max Q(\boldsymbol{\alpha})$.

При помощи этого подхода были определены рациональные параметры ряда локомотивов и вагонов. В качестве методов оптимизации использовались как регулярные, так и случайные методы поиска экстремума.

Так как эффективность поиска существенно зависит от особенностей целевой функции, детально рассмотрен её характер. Так в работах М. Л. Коротенко, Ю. Н. Базилевича, В. А. Татариновой [18, 19] учитывается овражность, связанная с тем, что значение $\min_{\boldsymbol{\alpha}} \max_{i} \operatorname{Re}(\lambda_i)$ может достигаться для различных собственных значений $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha})$ и $\lambda_2(\boldsymbol{\alpha})$, имеющих различные градиенты (считаем, что собственные числа занумерованы в порядке убывания их вещественных частей). При этом для оптимизации используется градиентный метод, а составляющие градиента вычисляются с помощью формулы, определяющей чувствительность собственных чисел матрицы к изменению её параметров [5, 20]. Для реализации этого способа необходимо после того, как окажется, что $\operatorname{Re}\lambda_1 - \operatorname{Re}\lambda_2 < \varepsilon$ (ε — малое положительное число), выбирать длину очередного шага такой, чтобы после него с некоторой точностью выполнялось равенство $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_1$, а затем находить направление следующего шага с учетом этого равенства. Проведенные вычисления показали, что применение овражных методов в рассмотренных задачах ускоряет процесс оптимизации и позволяет найти место «оврага», в котором находятся оптимальные значения целевой функции.

Корректное упрощение дифференциальных уравнений возмущённого движения

Исследование устойчивости движения рельсовых экипажей приводит к необходимости анализа систем дифференциальных уравнений и определения собственных чисел матриц коэффициентов линейных или линеаризированных дифференциальных уравнений возмущённого движения высокого порядка. Наличие в числе сил, действующих в системе, неконсервативных позиционных сил приводит к невозможности приведения системы к главным координатам и существенно усложняет решение поставленной задачи.

Для упрощения решения задачи использовались методы корректного понижения порядка рассматриваемых систем уравнений. При этом использовались два подхода.

В первом подходе для понижения порядка исходных линейных систем использовались методы точной декомпозиции, в числе которых – как методы использующие аппарат теории групп, так и теоремы о строении конечномерных алгебр.

При использовании методов декомпозиции, учитывающих симметрию с помощью теории групп, разработаны новые подходы для учёта влияния неконсервативных позиционных сил и эффективного выполнения соответствующих расчётов [21-23]. Например, получено, что система уравнений возмущенного движения восьмиосного вагона с одинарным рессорным подвешиванием, имеющая 32-й порядок, разбивается на шесть подсистем с порядками соответственно 2, 4, 6, 6, 6, 8, причем две подсистемы 6-ого порядка идентичны. При анализе расчётной схемы экипажа высокоскоростного наземного транспорта на электромагнитном подвешивании получено, что система уравнений 78-ого порядка распадается на четыре подсистемы, имеющие порядки 12, 12, 28 и 26.

Для дальнейшего понижения порядка Ю. Н. Базилевичем были разработаны [21, 24, 25] методы приведения нескольких матриц к наилучшему блочно-диагональному и наилучшему блочно-треугольному виду с помощью замены переменных. Следует заметить, что готовое решение таких задач есть только для случая одной матрицы. Одну матрицу можно привести к её жордановой форме. Создание канонической формы для пары матриц — знаменитая нерешённая задача. Эту задачу и эквивалентные ей задачи называют дикими задачами [26].

Второй подход связан с упрощением нелинейных дифференциальных уравнений.

В работе [27] для корректного понижения порядка нелинейных дифференциальных уравнений возмущённого движения автономных систем предложен метод, основанный на исключении быстро затухающих решений. При этом сначала производится линеаризация исходной системы методами чебышевских приближений [28] и последующее приведение линеаризованной системы к главным фазовым координатам при помощи матрицы преобразования, столбцами которой являются собственные векторы матрицы линеаризованной системы. Затем в нелинейной системе переменные, соответствующие быстро затухающим главным координатам линеаризованной системы, полагаются равными нулю.

Также было рассмотрено понижение порядка неавтономных нелинейных систем [7].

Дальнейшее развитие эти способы получили в работе [29], в которой рекомендуется вместо лагранжевой применять гамильтонову форму уравнений и использовать преобразование

Уорда [30], чтобы избежать потери точности при обращении плохо обусловленной матрицы.

К указанным работам близка и работа [31], в которой при преобразовании линеаризованной по Чебышеву системы не требуется решения полной проблемы собственных значений матрицы.

Проблема малости начальных возмущений

Как известно, теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению применимы только при достаточно малых начальных и текущих возмущениях [5]. Поэтому необходима оценка результатов, полученных по первому приближению.

В этом направлении важна работа Ю. Н. Базилевича [32], в которой получена оценка области притяжения решения системы дифференциальных уравнений, т. е. такой области, внутри которой начальные возмущения гарантированно будут достаточно малыми для применения теории А. М. Ляпунова.

Так для системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$ – n-мерный вещественный вектор; A – постоянная вещественная матрица простой структуры; $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ – вектор-функция, для которой выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\right\| \le M \cdot \left\|\mathbf{x}\right\|^{1+\alpha},$$

где M и α – положительные числа; $\|\cdot\|$ – евклидова норма: $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum\limits_k |\mathbf{x}_k|^2$, достаточно малыми будут начальные возмущения, удовлетворяющими неравенству

$$\mathbf{x}_0^*\left(P^{-1}\right)^* P^{-1}\mathbf{x}_0 < \left(\frac{-\max \operatorname{Re}\lambda_k}{n \cdot \left\|P^{-1}\right\| \cdot M \cdot \left\|P\right\|^{1+\alpha}}\right)^{2/\alpha}$$

(здесь λ_i – собственные числа матрицы A; P – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A).

Соответствующие расчеты можно выполнить даже для системы уравнений высокого порядка. Действительно, все вычисления здесь сводятся к определению собственных чисел и канонических базисов матриц. Это можно осуществить с помощью хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов (например, QR-алгоритма и метода обратных итераций).

Достоинствами предложенной оценки являются её сравнительная простота и применимость к системе достаточно высокого порядка, а также непосредственное присутствие в формуле величины $h = \max\limits_i \operatorname{Re}(\lambda_i)$, используемой в качестве запаса устойчивости в задачах больших размерностей.

К этому направлению примыкает работа [28], в которой предлагается заменить правые части уравнений возмущённого движения их лучшим линейным приближением по Чебышеву в заданной окрестности D начала координат. В этом случае расширяется область применения первого приближения и появляется возможность привести критические случаи к некритическим [28, 33-35].

Заключение

Обширные теоретические результаты и богатый экспериментальный материал по исследованию динамики локомотивов и вагонов позволили В. А. Лазаряну сформулировать требования, обеспечивающие хорошие динамические качества рельсовых экипажей [36]. Требования эти содержат два условия. Первое заключается в том, что асимптотическая устойчивость в заданном диапазоне скоростей должна быть обеспечена. Условие это является необходимым, но не достаточным, так как необходимо еще, чтобы перемещения, ускорения и усилия, возникающие вследствие колебаний при движении экипажей по рельсовому пути не превышали заданных значений. То есть параметры системы должны выбираться из области асимптотической устойчивости при условии, что реакция системы на возмущения при вынужденных колебаниях будет ограничена. Этот результат является важным для проектирования и оценки конструкций рельсовых экипажей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лазарян, В. А. Собственные колебания тележечных грузовых вагонов [Текст] / В. А. Лазарян // Вестник ВНИИЖТ. – 1958. – № 2. – С. 7-12.
2. Лазарян, В. А. Власні коливання локомотивів [Текст] / В. А. Лазарян // Прикл. механика. – 1960. – **6**, № 1. – С. 312-319.
3. Лазарян, В. А. Применение математических машин непрерывного действия к решению задач динамики подвижного состава железных дорог. [Текст] / В. А. Лазарян. – М.: Трансжелдориздат, 1962. – 218 с.
4. Лазарян, В. А. Динамика вагонов [Текст] / В. А. Лазарян. – М.: Транспорт, 1964. – 256 с.
5. Лазарян, В. А. Устойчивость движения рельсовых экипажей [Текст] / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко. – К.: Наук. думка, 1972. – 199 с.
6. Лазарян, В. А. Исследования устойчивости движения рельсовых экипажей [Текст] /

В. А. Лазарян // Прикл. механика. – 1977. – № 10. – С. 80-86.
7. Лазарян, В. А. Применение принципа сведения к исследованию колебаний неавтономных нелинейных систем [Текст] / В. А. Лазарян, Л. А. Длугач, М. Л. Коротенко // Нагруженность, колебания и прочность сложных механических систем : сб. ст. / АН УССР, Днепропетр. отд-ние ин-та механики. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 3-7.
8. Лазарян, В. А. Колебания железнодорожного состава [Текст] / В. А. Лазарян // Вибрации в технике. – М., 1980. – Т. 3: Машиностроение. – С. 398-433.
9. Лазарян, В. А. Определение параметров четырехосного полувагона, при которых его движение устойчиво [Текст] / В. А. Лазарян, М. Л. Коротенко, А. А. Львов // Вопросы динамики и прочности подвижного состава: Тр. ДИИТа. – М., 1966. – Вып. 62. – С. 3-25.
10. Лазарян, В. А. Влияние упрощений расчетной схемы на результаты исследования устойчивости движения четырехосного полувагона [Текст] / В. А. Лазарян, М. Л. Коротенко, В. Д. Данович // Вопросы динамики подвижного состава: Тр. ДИИТа. – М., 1967. – Вып. 68. – С. 42-47.
11. Определение собственных значений матриц высоких порядков при помощи QR-алгоритма [Текст] / В. А. Лазарян и др. // Некоторые задачи механики скоростного рельсового транспорта: Материалы науч.-техн. совещ. (Днепропетровск, 1972 г.). – К., 1973. – С. 43-55.
12. Лазарян, В. А. Применение численных методов оптимизации к исследованию устойчивости невозмущённого движения [Текст] / В. А. Лазарян, М. Л. Коротенко // Переходные режимы движения и колебания подвижного состава: Тр. ДИИТа. – Д., 1970. – Вып. 114. – С. 69-73.
13. Лазарян, В. А. Применение численных методов оптимизации к определению рациональных параметров рельсовых экипажей [Текст] / В. А. Лазарян, М. Л. Коротенко, О. М. Ратникова // Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе: Тр. науч. конф. – Канев, 1974. – С. 3-6.
14. Лазарян, В. А. Применение метода случайного поиска к определению рациональных значений параметров рессорного подвешивания [Текст] / В. А. Лазарян, М. Л. Коротенко, О. М. Ратникова // Динамика и прочность высокоскоростного наземного транспорта / АН УССР. – К. 1976. – С. 97-103.
15. Зильберман, И. А. Об одном алгоритме оптимизации параметров динамических систем [Текст] / И. А. Зильберман, М. Л. Коротенко // Динамика и прочность высокоскоростного наземного транспорта / АН УССР. – К., 1976. – С. 106-110.
16. Коротенко, М. Л. Оптимизация параметров рельсовых экипажей по величине критической скорости [Текст] / М. Л. Коротенко, О. М. Ратникова // Исследования в области динамики рельсовых экипажей: Тр. ДИИТа. – Д., 1976. – Вып. 182/22. – С. 18-21.
17. Коротенко, М. Л. К использованию одного из методов глобального поиска при определении рациональных параметров рельсовых экипажей [Текст] / М. Л. Коротенко, О. М. Ратникова // Динамика и прочность высокоскоростного наземного транспорта / АН УССР. – К., 1976. – С. 103-106.
18. Базилевич, Ю. Н. О применении методов теории чувствительности для стабилизации сложных динамических систем. [Текст] / Ю. Н. Базилевич, М. Л. Коротенко, В. А. Татаринова // Теория инвариантности и её применение. Ч. 2. – К.: Наук. думка, 1979. – С. 16-21.
19. Коротенко, М. Л. Оптимизация параметров механических систем при овражном характере целевой функции [Текст] / М. Л. Коротенко, Ю. Н. Базилевич, В. А. Татаринова // Динамика и прочность сложных механических систем. – К., 1977. – С. 31-33.
20. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов [Текст] / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
21. Базилевич, Ю. Н. Расщепление уравнений неконсервативной колебательной системы, обладающей симметрией, с помощью теории групп [Текст] / Ю. Н. Базилевич // Некоторые задачи механики скоростного наземного транспорта. – К.: Наук. думка, 1974. – С. 53-56.
22. Базилевич, Ю. Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики [Текст] / Ю. Н. Базилевич – К.: Наук. думка, 1987. – 156 с.
23. Базилевич, Ю. Н. Вибір узагальнених координат локомотива з трьома візками з урахуванням симетрії його розрахункової схеми [Текст] / Ю. М. Базилевич, М. Л. Коротенко // Вісник Запорізького держ. ун-ту. Фізико-математичні науки, Біологічні науки. № 1, 2000. – С. 13-16.
24. Базилевич, Ю. Н. Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем [Текст] / Ю. Н. Базилевич // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, № 2. – С. 360-361.
25. Базилевич, Ю. Н. Точная декомпозиция линейных систем [Электрон. ресурс] / Ю. Н. Базилевич // Электронный журнал «Исследовано в России», 018, стр. 182-190, 2006 г. – Способ доступа – http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/018.pdf
26. Дрозд, Ю. А. О ручных и диких матричных задачах [Текст] / Ю. А. Дрозд // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104-114.
27. Понижение порядка систем нелинейных дифференциальных уравнений движения путем исключения быстрозатухающих решений [Текст] / В. А. Лазарян и др. // Прикл. механика. – 1975. – Вып.8. – С. 81-88.

28. Длугач, Л. А. О применении методов чебышевской аппроксимации к исследованию устойчивости движения в критических случаях [Текст] / Л. А. Длугач // Прикл. механика. – 1965. – Вып. 8. – С. 139-140.
29. Длугач, Л. А. Понижение порядка гамильтоновых систем [Текст] / Л. А. Длугач, В. А. Татаринова //Нагруженность и динамические качества механических систем. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 19-24.
30. Парс, Л. Аналитическая динамика [Текст] / Л. Парс. – М.: Мир, 1970. – 636 с.
31. Зильберман, И. А. О понижении порядка системы дифференциальных уравнений [Текст] / И. А. Зильберман // Нагруженность и динамические качества механических систем. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 24-28.
32. Базилевич, Ю. Н. Оценка области притяжения решения уравнений движения с помощью собственных чисел [Текст] / Ю. Н. Базилевич // Колебания и динамические качества механических систем. – К.: Наук. думка, 1983. – С. 14-17.
33. Длугач, Л. А. Применение методов чебышевского приближения к вопросам устойчивости нелинейных колебаний [Текст] / Л. А. Длугач // Совещание по проблеме нелинейных колебаний механических систем: Тез. докл. – Рига, 1964. – С. 33-34.
34. Длугач, Л. А. О применении Чебышевских приближений к вопросам нелинейных колебаний [Текст] / Л. А. Длугач // Вопросы динамики подвижного состава и применения математических машин: Тр. ДИИТа. – Д., 1964. – Вып. 50. – С. 47-51.
35. Длугач, Л. А. Использование чебышевской аппроксимации для исследования устойчивости движения железнодорожных экипажей [Текст] / Л. А. Длугач, Е. Н. Добровольская // Решение инженерных задач для железнодорожного транспорта: Тр. ДИИТа. – Д., 1973. – Вып. 3. – С. 61-65.
36. Лазарян, В. А. Современные проблемы транспортных средств [Текст] / В. А. Лазарян // Нагруженность, прочность, устойчивость движения механических систем. – К.: Наук. думка, 1980. – С. 3-43.

Поступила в редколлегию 31.07.2009