 ISSN 2415-7031

УДК 519.6

ПОБУДОВА ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМУ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ПОШУКУ НАЙБІЛЬШ ПРИВАБЛИВИХ РІШЕНЬ

ЧОРНОМОРЕЦЬ Г. Я. [1], *аспірант,*
ІРОДОВ В. Ф. [2], *д.т.н, проф.*

[1] Кафедра теплотехніки і газопостачання, Державний вищий навчальний заклад "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562)) 47-17-22, e-mail: ChHYa@i.ua, ORCID ID: 0000-0003-4964-5785
[2] Кафедра теплотехніки і газопостачання, Державний вищий навчальний заклад "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 47-17-22, e-mail: vfirodov@i.ua, ORCID ID: 0000-0001-8772-9862

Анотація. ***Мета.*** При рішенні крайових задач методом Гальоркіна необхідно задавати базисні функції, завдання базисних функцій у аналітичній формі не завжди відповідає загальному рішенню. Привабливе завдання базисних функцій у графічному вигляді. Але при цьому виникає задача оцінки параметрів цих базисних функцій, які можуть входити в опис нелінійно. Метою даної роботи є розробка загального підходу вирішення крайових задач методом Гальоркіна, коли базисні функції задані не аналітично, а у геометричному вигляді. ***Методика.*** Запропонований новий загальний підхід вирішення крайових задач методом Гальоркіна, коли базисні функції задані не в аналітичному вигляді, а у геометричній формі. Для пошуку параметрів базисних функцій заданих у геометричній формі застосовується алгоритм еволюційного пошуку рішень. Побудований чисельний алгоритм методу Гальоркіна з використанням еволюційного алгоритму випадкового пошуку найбільш привабливих рішень та графічного представлення базисних функцій. **Результати.** Побудована загальна схема численного методу Гальоркіна з використанням алгоритму еволюційного пошуку найбільш привабливих рішень. У якості приклада наведено результати численного рішення тестової крайової задачі теплопровідності в тілі з двовимірним полем температури. Результати численного розрахунку при завданні базисних функцій у графічній формі співставленні з точним рішенням, отримано задовільний збіг результатів. ***Наукова новизна.*** Для вирішення крайових задач методом Гальоркіна запропоновано використовувати не аналітичне, а графічне представлення базисних функцій. Невідомі параметри виразу рішення через базисні функції можуть входити нелінійно. Для пошуку невідомих параметрів виразу загального рішення запропоновано використовувати алгоритм еволюційного пошуку. Наведений еволюційний алгоритм з адаптацією параметрів пошуку, який збігається з шуканим рішенням з вірогідністю 1. ***Практична значимість.*** Запропоновано при рішенні крайових задач методом Гальоркіна використовувати графічне представлення базисних функцій, що дає змогу досліджувати об'єкти коли невідомий аналітичний вид функцій. Використання методу Гальоркіна при рішенні задач, коли базисні функції задані не аналітично, а у геометричному вигляді дозволить розширити клас рішення крайових задач, в тому числі можливість формулювання складних відношень відбору для пошуку рішень.

Ключові слова: метод Гальоркіна; крайова задача; графічне зображення базисних функцій; алгоритм еволюційного пошуку

ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ЭВОЛЮЦИОННОГО ПОИСКА НАИБОЛЕЕ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

ЧЕРНОМОРЕЦ Г. Я. [1], *аспирант,*
ИРОДОВ В. Ф. [2], *д.т.н, проф.*

[1] Кафедра теплотехники и газоснабжения, Государственное высшее учебное заведение "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562)) 47-17-22, e-mail: ChHYa@i.ua, ORCID ID: 0000-0003-4964-5785
[2] Кафедра теплотехники и газоснабжения, Государственное высшее учебное заведение "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562)) 47-17-22, e-mail: vfirodov@i.ua, ORCID ID: 0000-0001-8772-9862

Аннотация. ***Цель***. При решении краевых задач методом Галеркина необходимо задавать базовые функции, задание базисных функций в аналитической форме не всегда соответствует общему решению. Привлекательное задание базисных функций в графическом виде. Но при этом возникает задача оценки параметров этих базисных функций, которые могут входить в описание нелинейно. Целью данной работы является разработка общего подхода решения краевых задач методом Галеркина, когда базисные функции заданы не аналитически, а в геометрическом виде. ***Методика.*** Предложен новый общий подход к решению краевых задач методом Галеркина, когда базисные функции заданы не в аналитическом виде, а в геометрической форме. Для поиска параметров базисных функций заданных в геометрической форме применяется алгоритм эволюционного поиска решений. Построен численный алгоритм метода Галеркина с использованием эволюционного алгоритма случайного поиска предпочтительных решений и графического представления базисных функций. ***Результаты.*** Построена общая схема численного метода Галеркина с использованием алгоритма эволюционного поиска предпочтительных решений. В качестве примера приведены результаты численного решения тестовой краевой задачи теплопроводности в теле с двумерным полем температуры. Результаты численного расчета при задании базисных функций в графической форме сопоставлены с точным решением, получено удовлетворительное совпадение результатов. ***Научная новизна.*** Для решения краевых задач методом Галеркина предложено использовать не аналитическое, а графическое представление базисных функций. Неизвестные параметры выражения решения через базисные функции могут входить нелинейно. Для поиска неизвестных параметров выражения общего решения предложено использовать алгоритм эволюционного поиска. Приведенный эволюционный алгоритм с адаптацией параметров поиска, который совпадает с искомым решением с вероятностью 1. ***Практическая значимость.*** Предложено при решении краевых задач методом Галеркина использовать графическое представление базисных функций, что позволяет исследовать объекты, когда неизвестный аналитический вид функций. Использование метода Галеркина при решении задач, когда базисные функции заданы не аналитически, а в геометрическом виде позволит расширить класс решение краевых задач, в том числе возможность формулировки сложных отношений отбора для поиска решений.

Ключевые слова: метод Галеркина; краевая задача; графическое изображение базисных функций; алгоритм эволюционного поиска

NUMERICAL GALERKIN METHOD USING ALGORITHM OF EVOLUTIONARY SEARCH THE PREFERRED SOLUTION

CHORNOMORETS H. Y. [1], *P.G.,*
IRODOV V.F. [2], *Dr. Sc. (Tech.), Prof.*

[1] Department of Heat Technique and Gas Supply, State Higher Education Establishment "Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-A, Chernishevskogo str., Dnipropetrovsk 49600, Ukraine, phon. +38 (0562)) 47-17-22, e-mail: ChHYa@i.ua, ORCID ID: 0000-0003-4964-5785
[2] Department of Heat Technique and Gas Supply, State Higher Education Establishment "Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-A, Chernishevskogo str., Dnipropetrovsk 49600, Ukraine, phon. +38 (0562)) 47-17-22, e-mail: vfirodov@i.ua, ORCID ID: 0000-0001-8772-9862

Abstract. ***Purpose.*** In solving boundary value problems by Galerkin method should set basic functions. Set of basic functions in analytical form does not always correspond to the total solution. Attractive set basis functions is graphically. But while the challenge is estimating the parameters of the basic functions that may include a description not linear. The aim of this work is to develop a general approach for solving boundary value tasks by Galerkin method, when the basis function is given not analytically but in geometric form. ***Methodology***. It was proposed a new general approach for solving boundary value problems by Galerkin method. In this method basis functions were given in geometric form but not in analytic form. To search the parameters of the basis functions which were defined in geometric form is used the evolutionary algorithm. Was constructed numerical algorithm Galerkin method with the help of evolutionary algorithm random search of the most attractive solutions and graphical representations of the basis functions. ***Findings.*** It was built general scheme of numerical Galerkin method with the use an evolutionary algorithm to find the most attractive solutions. As an example, were given the results of numerous solution to the boundary problem of heat conduction in the body of the two-dimensional temperature field. Were given the results of numerous calculation when setting the basic functions in graphic form a comparison with the exact solution. It was received a satisfactory coincidence of results. ***Originality.*** It was suggested to use not analytical but graphical representation of the basis functions for solving boundary value problems by Galerkin method. The unknown parameters of the expression solution using basis functions may include non-linear. It was suggested to use an evolutionary algorithm to search for the unknown parameters of the expression of the general solution. There is provided an evolutionary algorithm with the adaptation of search terms that match the desired solution with probability 1. ***Practical value.*** It was suggested that in solving boundary value problems by Galerkin method to use a graphical representation of basis functions, allowing objects to investigate when an unknown type of analytical functions. To use Galerkin method in solving problems when the basis functions given not analytically but in geometric form will expand class solutions boundary problems, including the possibility of formulating complex relationships selection to find solutions.

Keywords: Galerkin method; boundary problem; graphic representation of basis functions; evolutionary search algorithm

Введення

Для розробки та проектування системи опалення з трубчастими газовими нагрівачами розташованими у будівельних конструкціях необхідно вирішувати задачі теплообміну у каналі будівельної конструкції. Рішення таких задач ускладнюється тим, що не завжди базисні функції задані аналітично. Для цього необхідно розробити новий загальний підхід для вирішення таких крайових задач. Для рішення таких задач підходить метод Гальоркіна.

Мета

Метою даної роботи є розробка загального підходу вирішення крайових задач методом Гальоркіна, коли базисні функції задані не аналітично а у геометричному вигляді.

Методика

Найважливіші особливості методу Гальоркіна, сформульовані у роботі [8].

Багато робіт присвяченні рішенню крайових задач методом Гальоркіна [1,3,4,6,10, 12-18], але у всіх розглядається варіант коли функції φ мають аналітичний вид. У дослідженні [11] розроблено чисельне рішення з використанням методу Гальоркіна з методами екстраполяції, але при цьому функції задані кількісним способом. Дослідник легко може знайти аналітичне рішення функції методом Гальоркіна, але у багатьох випадках невідомі кількісні характеристики досліджуваного об'єкту. Знаючи які процеси протікають, їх можна задати графічно. Для рішення можна застосувати метод Гальоркіна.

Метод Гальоркіна представлений в наступній дуже компактній формі. Згідно з припущенням, двовимірна задача описується лінійним диференціальним рівнянням:

$$L(u)=0 \qquad (1)$$

в області $D\ (x,y)$ при граничних умовах:

$$S(u)=0$$

на лінії ∂D, що є межею області D. У методі Гальоркіна передбачається, що невідома u може бути досить точно представлена наближеним рішенням:

$$u_a=u_0(x,y)+\sum_{i=1}^{N} a_j\varphi_j(x,y) \qquad (2)$$

де: φ_j – це відомі аналітичні функції; функція u_0 введена, щоб задовольнити граничним умовам, тоді як a_j – це коефіцієнти, що підлягають визначенню. Підстановка виразу (2) в рівняння (1) призводить до відмінної від нуля нев'язкі R, яка виражається у вигляді:

$$R(a_0,a_1..a_N,x,y)=L(u_a)=L(u_0)+\sum_{i=1}^{N} a_j L(\varphi_j) \qquad (3)$$

В даній роботі наведено рішення крайової задачі методом Гальоркіна, в якій базисні функції представлені графічно. У такому випадку параметри, які входять до складу базисних функцій нелінійно приводять до нелінійної нев'язкі у вигляді (3).

Для вирішення цієї задачі у роботі запропоновано використовувати алгоритм еволюційного пошуку найбільш привабливих рішень [2,7]:

$$X_K=S(G(X_{K-1})),\ k=1,2,\ldots,$$

де: X_K – безліч найбільш бажаних рішень по відношенню вибору R_S для кроку $к$; X_{K-1} – те ж для $(к-1)$ – го кроку ітерації; $G(X)$ – функція генерації, породжена ставленням генерації R_G:

$$G_H(X)=\left\{y\in\Omega \middle| \exists x\in X, yR_Gx, \mu_{R_G}(x,y)>0\right\}$$

$S(X)$ – функція вибору, породжена ставленням вибору:

$$S(X)=\left\{x\in X \middle| \forall y\in[X\setminus S(X)], xR_Sy\right\}$$

Потім проводиться оцінка кращих рішень, відібраних в усіх гілках пошуку:

$$x_0^i=\Big(\sum_{j=1}^{N_в}\sum_{l=1}^{N_л} x_{lj}^i\Big)/(N_B\cdot N_Л)$$

$$l=1,2,\ldots,N_Л$$

$$j=1,2,\ldots,N_B$$

де: i – порядковий номер змінної; l – номер відібраного рішення; j – номер галузі еволюційного процесу; $N_Л$ – кількість кращих рішень, що відбираються на кожному кроці еволюційного пошуку в однієї гілки; N_B – кількість гілок розрахунку еволюційного алгоритму.

Після цього проводиться оцінка емпіричних дисперсій у вигляді:

$$\sigma_i^2=\Big(\sum_{j=1}^{N_в}\sum_{l=1}^{N_л}(x_{lj}^i-x_0^i)^2\Big/(N_B\cdot N_Л-1)\Big)$$

На $(k+1)$ – ому кроці ітерації виробляється генерація нових рішень по нормальному закону для кожної змінної x^i з центрами в точках x^i_{lj}, $l=1,N_л$, $j=1,N_B$ і дисперсією σ_i^2.

Як приклад реалізації запропонованого підходу розглянемо рішення двомірної задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$$

Задані граничні умови першого роду:

$$\theta=T-T_a=0 \text{ при } x=0 \text{ і } x=L$$

де: θ – шукана надмірна температура стінки; T_a – температура бічних поверхонь стінки підтримується постійною.

$$\theta_1=T_1-T_a=0 \text{ при } y=0\quad 0<x<L$$

$$\theta\to 0 \text{ при } y\to\infty$$

де: T_1 – температура нижнього торця стінки підтримується постійною.

Різницева апроксимація диференціальних операторів наведена в [5].

При визначенні різницевої похідної замість відношення нескінченно малих можна обмежиться відношенням кінцевих різниць. Для апроксимації похідної у вузлі x_i використані наступні співвідношення:

$$\theta_x^+ = \frac{\theta(x_{i+1}, y_j) - \theta(x_i, y_j)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\theta_{i+1}^j - \theta_i^j}{h} = \frac{\theta(+1) - \theta}{h}$$

$$\theta_x^- = \frac{\theta(x_i, y_j) - \theta(x_{i-1}, y_j)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\theta_i^j - \theta_{i-1}^j}{h} = \frac{\theta - \theta(-1)}{h}$$

$$\theta_y^+ = \frac{\theta(y_{j+1}, x_i) - \theta(y_j, x_i)}{y_{j+1} - y_j} = \frac{\theta_{j+1}^i - \theta_j^i}{h} = \frac{\theta(+1) - \theta}{h}$$

$$\theta_y^- = \frac{\theta(y_j, x_i) - \theta(y_{j-1}, x_i)}{y_i - y_{i-1}} = \frac{\theta_j^i - \theta_{j-1}^i}{h} = \frac{\theta - \theta(-1)}{h}$$

Друга різницева похідна визначена таким чином:

$$\theta_{xx}^- = \frac{1}{h}\left[\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} - \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h}\right] = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} = = \frac{\theta(+1) - 2\theta + \theta(-1)}{h^2}$$

$$\theta_{yy}^- = \frac{1}{h}\left[\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{h} - \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{h}\right] = \frac{\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}}{h^2} = = \frac{\theta(+1) - 2\theta + \theta(-1)}{h^2}$$

У даному прикладі пошук рішень здійснювався у формі:

$$\theta = \theta_0(x, y) \cdot f(x) \cdot f(y) \qquad \text{при} \quad \begin{matrix} 0 < x < 0{,}5 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$$

де: $\theta_0 = \theta_0(x,y)$ – базисна функція, задана геометрично (рис.1.);

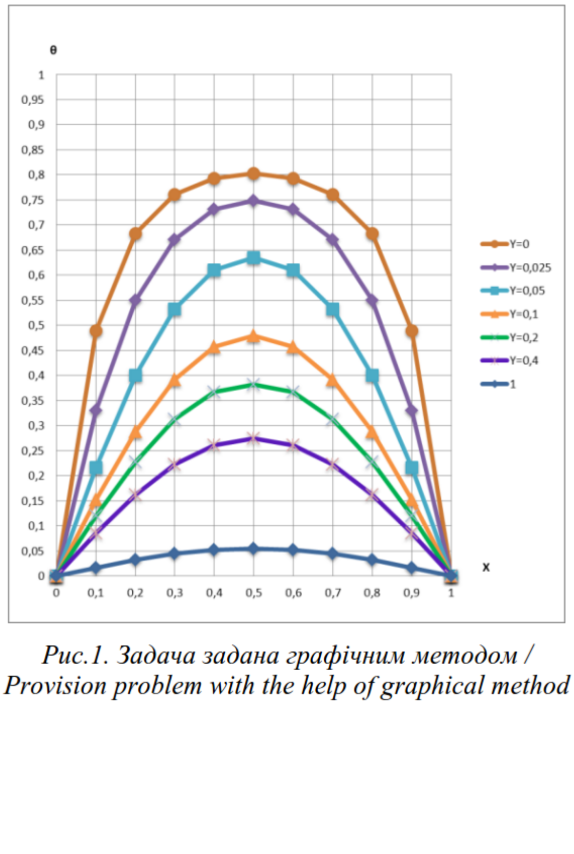

Рис.1. Задача задана графічним методом / Provision problem with the help of graphical method

f(x) f(y) – додаткові базисні функції, задані в даному прикладі в алгебраїчній формі:

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \qquad \text{при} \quad y = 0; \theta = 1 \qquad (4)$$
$$f(y) = b_1 + \frac{b_2}{y} + \frac{b_3}{y^2},$$

так, що $\theta = \theta_0\left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2\right) \cdot \left(b_1 + \frac{b_2}{y} + \frac{b_3}{y^2}\right)$.

Відоме точне рішення викладеної задачі [9], яке можна записати у вигляді:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{e^{-(n\pi/L)y}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

На рисунку 2 наведено порівняння знайденого рішення і точного рішення задачі.

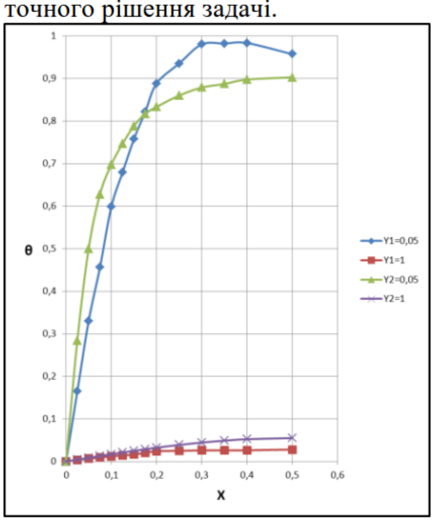

Рис.2. Порівняння двох рішень задачі / Comparison of the solutions of the task:

(y1) – результати рішення задачі за допомогою нового підходу вирішення крайових задач методом Гальоркіна; (y2) – результати відомого точного рішення викладеної задачі.

З порівняння (рис. 2.) видно, що знайдене рішення задовільно відповідає точному рішенню, перш за все через вдале використання базисних функцій в графічній формі. Разом з тим використання додаткових базисних функцій в аналітичній формі (4) не зовсім вдале, у подальшому треба або більш ретельний пошук додаткових базисних функцій або їх представлення також у графічній формі.

Результати

Побудований чисельний алгоритм методу Гальоркіна з використанням еволюційного алгоритму випадкового пошуку найбільш привабливих рішень та графічного представлення базисних функцій. В якості прикладу наведено рішення тестової задачі теплопровідності. Порівняння знайденого рішення з точним показало задовільне співвідношення результатів.

ISSN 2415-7031

Наукова новизна і практична значимість

Для вирішення крайових задач методом Гальоркіна запропоновано використовувати не аналітичне, а графічне представлення базисних функцій. Невідомі параметри виразу рішення через базисні функції можуть входити нелінійно. Для пошуку невідомих параметрів виразу загального рішення запропоновано використовувати алгоритм еволюційного пошуку. Наведений еволюційний алгоритм з адаптацією параметрів пошуку, який збігається з шуканим рішенням з вірогідністю 1.

У якості прикладу зроблено порівняння рішення тестової двомірної задачі теплопровідності з рішенням, знайденим розробленим чисельним методом. Порівняння показало задовільний збіг результатів.

Висновки

1. Запропоновано при рішенні крайових задач методом Гальоркіна використовувати графічне представлення базисних функцій, що дає змогу досліджувати об'єкти коли невідомий аналітичний вид функцій.

2. Для знаходження загального рішення запропоновано використовувати еволюційний алгоритм випадкового пошуку найбільш привабливих рішень. Представлені результати чисельного рішення показують обґрунтованість розробленого підходу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Гращенков, С. И. Использование разрывного метода Галеркина для расчета распределения температуры в системе твердое тело−газ при малых числах Кнудсена / С. И. Гращенков // Журнал технической физики. – 2015. – том 85, № 8. – С. 1–5.

Grashchenkov S.I. Ispolzovanie razryvnogo metoda Galerkina dlja rascheta raspredelenija temperatury v sisteme tverdoe telo−gaz pri malykh chislakh Knudsena [Using a discontinuous Galerkin method for calculating the temperature distribution in the solid-gas at small Knudsen]. *Zhurnal tekhnycheskoy fiziki – Technical Physics*, 2015, vol. 85, no. 8, pp. 1–5.

2. Иродов, В. Ф. О построении и сходимости алгоритмов самоорганизации случайного поиска / В. Ф. Иродов // Автоматика. – 1987. – № 4. – С. 34–43.

Irodov V.F. O postroenii i skhodimosti algoritmov samoorganizatsii sluchaynogo poiska [The construction and convergence of random search algorithms for self-organization]. *Avtomatyka – Automation*, 1987, no. 4, pp. 34–43.

3. Ледякин, Ю. Я. Метод Галеркина. Способ параллельной реализации задач математической физики в едином вычислительном потоке / Ю. Я. Ледякин // Математичні машини і системи. – 2012. – № 3. – С. 69–80.

Ledyakin Yu.Ya. Metod Galerkina. Sposob parallelnoy realizatsii zadach matematicheskoy fiziki v edinom vychislitelnom potoke [Galerkin method. Parallel implementation of the method of mathematical physics in a single stream computing]. *Matematychni mashyny i systemy – Mathematical machines and systems*, 2012, no. 3, pp. 69–80.

4. Погребицька, Г. М. Застосування асимптотичного розширеного гібридного ВКБ-Гальоркін підходу в задачі про теплопровідність тонкого стрижня конічної форми / Г. М. Погребицька // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя, 2014. – № 1. – С. 122–127.

Pohrebytska G.M. Zastosuvannia asymptotychnoho rozshyrenoho hibrydnoho VKB-Halorkin pidkhodu v zadachi pro teploprovidnist tonkoho stryzhnia konichnoi formy [The use of advanced hybrid asymptotic WKB - Galerkin approach to the problem of thermal conductivity of thin conical core]. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu* [Bulletin Zaporizhzhya National University], 2014, no. 1, pp. 122–127.

5. Самарский, А. А. Разностные схемы газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. – Москва: Наука, 1975. –352 с.

Samarskiy A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye skhemy gazovoy dinamiki* [The difference schemes of gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 352 p.

6. Сінчук, Ю. О. Адаптивні схеми методу скінченних елементів для сингулярно збурених варіаційних задач конвекції-дифузії: автореф. дис. … канд. ф-м. наук : 01.05.02 / Сінчук Юрій Олександрович ; Національна академія наук України Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача. – Львів, 2008. – 157 с.

Sinchuk Yu.O. *Adaptyvni skhemy metodu skinchennykh elementiv dlia synhuliarno zburenykh variatsiinykh zadach konvektsii-dyfuzii.* Avtoreferat Diss. [Adaptive finite element method for singularly perturbed variational problems of convection-diffusion. Author's abstract.]. Lviv, 2008. 157 p.

7. Стратан, Ф. И. Эволюционные алгоритмы поиска оптимальных решений / Ф. И. Стратан, В. Ф. Иродов // Методы оптимизации при проектировании систем теплогазоснабжения. – Кишинев: Штиинца, 1984. – С. 16–30.

Stratan F.I., Irodov V.F E*volyutsionnye algoritmy poiska optimalnykh resheniy* [Evolutionary algorithms search for optimal solutions]. Kishinev, Shtiintsa Publ., 1984, pp. 16–30.

8. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер : пер. с англ. – Москва : Мир, 1988. – 352 с.

Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galyorkina* [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow, Mir Publ., 1988. 352 p.

9. Юдаев, Б. Н. Теплопередача : учебник для вузов / Б. Н. Юдаев. – Москва: Высшая школа, 1981. –352 с.

Yudaev B.N. *Teploperedacha: Uchebnik dlja vuzov* [Heat: Textbook for Universities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981. 352 p.

10. Chen, J. Recent developments in stabilized Galerkin and collocation meshfree methods [Virtual Resource] / Jiun-Shyan Chen, Sheng-Wei Chi, Hsin-Yun Hu // Department of Civil & Environmental Engineering University of California. – 2011. – pp. 3–21. – Access Mode : URL : http://cames.ippt.gov.pl/pdf/CAMES_18_12_2.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 05 September 2015.

Chen J., Chi S., Hu H *Recent developments in stabilized Galerkin and collocation meshfree methods.* Department of Civil & Environmental Engineering University of California, 2011, pp. 3–21. Available at : URL: http://cames.ippt.gov.pl/pdf /CAMES_18_12_2.pdf. (Access : 05 September 2015).

11. Dai, B. Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov–

Galerkin method [Virtual Resource] / Baodong Dai, Baojing Zheng, Qingxiang Liang, Linghui Wang // Applied Mathematics and Computation. –2013. – pp. 10044–10052. – Access Mode : URL : http://ssu.ac.ir/cms/fileadmin/user_upload/Moavenatha/Mposhtibani/Mdaftar_fani/KhadamatKarkonan/Articles/EN/1-s2.0-S0096300313004244-main.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 05 September 2015.

Dai B., Zheng B., Liang Q., Wang L. *Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov–Galerkin method.* Applied Mathematics and Computation, 2013, pp. 10044–10052. Available at : URL: http://ssu.ac.ir/cms/fileadmin/user_upload/Moavenatha/Mposhtibani/Mdaftar_fani/KhadamatKarkonan/Articles/EN/1-s2.0-S0096300313004244-main.pdf. (Access : 05 September 2015).

12. Di Pietro, D. A. Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods [Virtual Resource] / D. A. Di Pietro, A. Ern // Series: Mathématiques et Applications. –2012.– 384 p. – Access Mode : URL : http://smai.emath.fr/spip/IMG/pdf/vol69.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 06 September 2015.

Di Pietro D.A., Ern A. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods.* Series: Mathématiques et Applications, 2012, 384 p.. Available at : URL: http://smai.emath.fr/spip/IMG/pdf/vol69.pdf. (Access : 06 September 2015).

13. Gorgulu, M. Z. Galerkin Method for the numerical solution of the RLW equation by using exponential B-splines [Virtual Resource] / M. Z. Gorgulu, I. Dag, D. Irk // Department of Mathematics-Computer Science. –2015. – pp. 1–16. – Access Mode : URL : http://arxiv.org/pdf/1504.05901.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 01 September 2015.

Gorgulu M.Z., Dag I., Irk D. *Galerkin Method for the numerical solution of the RLW equation by using exponential B-splines.* Department of Mathematics-Computer Science, 2015, pp. 1–16. Available at : URL: http://arxiv.org/pdf/1504. 05901. pdf. (Access : 01 September 2015).

14. Hesthaven, J. S. Nodal discontinuous Galerkin methods: Algorithms, analysis, and applications [Virtual Resource] / J. S. Hesthaven, T. Warburton // Department of Mathematics-Computer Science. –2008. – 502 p. – Access Mode : URL : http://www.springer.com/productFlyer_978-0-387-72065-4.pdf?SGWID=0-0-1297-173736528-0. – Title from Screen. – Date of Access : 01 September 2015.

Hesthaven J.S., Warburton T. *Nodal discontinuous Galerkin methods: Algorithms, analysis, and applications.* 2008, 502 p. Available at : URL : http://www.springer.com/productFlyer_978-0-387-72065-4.pdf?SGWID=0-0-1297-173736528-0. (Access : 01 September 2015).

15. Kumar, B. V. R. A three-step wavelet Galerkin method for parabolic and hyperbolic partial differential equations [Virtual Resource] B. V. Rathish Kumar, Mani Mehra // International Journal of Computer Mathematics Vol. 83, No. 1. –2006. – pp. 143–157 – Access Mode : URL : http://web.iitd.ac.in/~mmehra/publication/IJCM06.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 05 August 2015.

Kumar B.V.R., Mehra M. *A three-step wavelet Galerkin method for parabolic and hyperbolic partial differential equations.* 2006, pp. 143–157 Available at: URL: http://web.iitd.ac.in/~mmehra/publication/IJCM06.pdf. (Accessed: 05 August 2015).

16. Lew, A. An overview of variational integrators [Virtual Resource] / Adrian Lew Jerrold E. Marsden Michael Ortiz Matthew West // Finite element methods: 1970's and beyond. –2003. – 18 p. – Access Mode : URL : http://authors.library.caltech.edu/20293/1/LeMaOrWe2004a.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 01 August 2015.

.Lew A., Marsden J.E., Ortiz M., West M. *An overview of variational integrators.* 2003, 18 p. Available at: URL: http://authors.library.caltech.edu/20293/1/LeMaOrWe2004a.pdf. (Accessed: 01 August 2015).

17. Luo, H. A Reconstructed discontinuous Galerkin method for the compressible euler equations on arbitrary grids [Virtual Resource] Hong Luo, Luqing Luo, Robert Nourgaliev, Vincent A. Mousseau // American Institute of Aeronautics and Astronautics Vol. 130. –2009. – pp. 1–16.– Access Mode: URL: http://www5vip.inl.gov/technicalpublications/documents/4310593.pdf. – Title from Screen. – Date of Access : 05 August 2015.

Luo H., Luo L., Nourgaliev R., Mousseau V. A. *A Reconstructed discontinuous Galerkin method for the compressible euler equations on arbitrary grids.* 2009, pp. 1–16. Available at : URL: http://www5vip.inl.gov/technicalpublications/documents/4310593.pdf. (Accessed: 05 August 2015).

18. Volker, J. Numerical methods for partial differential equations [Virtual Resource] / John Volker –2013. – 107 p. – Access Mode : URL : https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_PDE_FUB/num_pde_fub.pdf. – Title from Screen. – Date of Access: 01 August 2015.

Volker J. *Numerical methods for partial dffierential equations.* 2013, 107 p. Available at : URL: https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_PDE_FUB/num_pde_fub.pdf. (Accessed: 01 August 2015).