УДК 519.85

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

КОСОЛАП А. И. [1*], *д. физ-мат. н., проф.*,
ПЕРЕТЯТЬКО А. С. [2*], *к. физ-мат. н.*

[1*] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днипро, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-7338-6707
[2*] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днипро, Украина, e-mail: _nastya_@ua.fm, ORCID ID: 0000-0002-4060-4648

Аннотация. ***Цель.*** Целью данной статьи является разработка новых и эффективных методов решения квадратичных задач. Такие задачи возникают в экономике, финансах, управлении, технологических процессах, информатике и других областях. Отличительной особенностью этих задач является их большая размерность и сложность для численного решения. В работе рассматривается модификация задач полуопределенной оптимизации, которая позволяет находить более точные оценки решений квадратичных задач. ***Методика.*** В данной работе квадратичные задачи преобразовываются в общую задачу полуопределенной оптимизации, а затем для ее решения применяется метод локального поиска. Условия неотрицательности переменных записываются в виде квадратичных ограничений $x_i\,(x_i - a) \le 0$. Число таких ограничений равно n. Вид таких ограничений в формулировке задачи полуопределенной оптимизации представляет собой матрицы с последовательным сдвигом ненулевых элементов. Значение a выбирается таким, чтобы выполнялось условие $x \le a$. При решении задач полуопределенной оптимизации использовалась вариация параметра a. ***Результаты.*** Были проведены сравнительные вычислительные эксперименты с задачами разной размерности. Для решения использовался эволюционный поиск и полуопределенная оптимизация. Во всех случаях метод полуопределенной оптимизации с локальным поиском давал лучшее решение. Как показали численные эксперименты, величина параметра a влияет на точность оценки решения исходной квадратичной задачи. Уменьшение этого параметра позволяет получать более точные оценки решения. ***Научная новизна.*** В работе предлагается для решения общих квадратичных задач использовать методы полуопределенной оптимизации с локальным поиском, а для уточнения полуопределенной релаксации – производить последовательное сужение допустимой области путем вариации параметра a. ***Практическая значимость.*** Рассмотренная методика поиска решения может быть использована для нахождения решения прикладных задач, которые могут быть сформулированы в виде общих задач квадратичной оптимизации. Сравнительные эксперименты подтверждают эффективность данного подхода для решения таких задач.

Ключевые слова: квадратичные задачи; полуопределенная оптимизация; уточнение оценок решений; локальный поиск; полуопределенная релаксация; квадратичная оптимизация

ЕФЕКТИВНИЙ РОЗВ’ЯЗОК КВАДРАТИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ НАПІВВИЗНАЧЕНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

КОСОЛАП А. І. [1*], *д. фіз-мат. н., проф.*,
ПЕРЕТЯТЬКО А. С. [2*], *к. фіз-мат. н.*

[1*] Кафедра спеціалізованих комп’ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-7338-6707
[2*] Кафедра спеціалізованих комп’ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпро, Україна, e-mail: _nastya_@ua.fm, ORCID ID: 0000-0002-4060-4648

Анотація. ***Мета.*** Метою даної статті є розробка нових і ефективних методів розв'язання квадратичних задач. Такі задачі виникають в економіці, фінансах, управлінні, технологічних процесах, інформатиці та інших областях. Відмінною особливістю цих задач є їх велика розмірність і складність для чисельного розв’язування. В роботі розглядається модифікація задач напіввизначеної оптимізації, яка дозволяє знаходити більш точні оцінки розв’язків квадратичних задач. ***Методика.*** У даній роботі квадратичні задачі перетворюються в загальну задачу напіввизначеної оптимізації, а потім для її розв’язання застосовується метод локального пошуку. Умови невід'ємності змінних записуються у вигляді квадратичних обмежень $x_i\,(x_i - a) \le 0$. Число таких обмежень дорівнює n. Вид таких обмежень в формулюванні задачі напіввизначеної оптимізації являє собою матриці з послідовним зсувом ненульових елементів. Значення a обирається таким, щоб виконувалася умова $x \le a$. При розв’язуванні задач напіввизначеної оптимізації використовувалася варіація параметра a. ***Результати.*** Були проведені порівняльні обчислювальні експерименти з задачами різної розмірності. Для розв’язання використовувався еволюційний пошук і напіввизначена оптимізація. У всіх випадках метод напіввизначеної оптимізації з локальним пошуком давав кращий розв'язок. Як показали чисельні експерименти, величина параметра *a* впливає на точність оцінки розв'язку вихідної квадратичної задачі. Зменшення цього параметра дозволяє отримувати більш точні оцінки розв'язку. ***Наукова новизна.*** У роботі для розв'язання загальних квадратичних задач пропонується використовувати методи напіввизначеної оптимізації з локальним пошуком, а для уточнення напіввизначеної релаксації – виконувати послідовне звуження допустимої області шляхом варіації параметра *a*. ***Практична значимість.*** Розглянута методика пошуку розв'язку може бути використана для знаходження розв'язку прикладних задач, які можуть бути сформульовані у вигляді загальних квадратичних задач. Порівняльні експерименти підтверджують ефективність даного підходу для розв'язання таких задач.

Ключові слова: квадратичні задачі; напіввизначена оптимізація; уточнення оцінок розв'язків; локальний пошук; напіввизначена релаксація; квадратична оптимізація

EFFICIENT SEMIDEFINITE METHODS FOR SOLVING QUADRATIC PROBLEMS

KOSOLAP A. I. [1*], *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.,*
PERETIATKO A. S. [2*], *Ph.D. (Phys.-Math.)*

[1*] Department of Specialized Computer Systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipro, 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-7338-6707
[2*] Department of Specialized Computer Systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipro, 49005, Ukraine, e-mail: _nastya_@ua.fm, ORCID ID: 0000-0002-4060-4648

Abstract. *Purpose.* The purpose of this article is to develop new and effective methods for solving quadratic problems. Such tasks arise in economy, finance, management, technological processes, informatics and other fields. A distinctive feature of these problems is their large dimension and complexity for the numerical attack. In this paper a modification of semidefinite optimization problems is considered, which makes it possible to find more accurate bounds of quadratic problems solutions. ***Methodology.*** In this paper quadratic problems are transformed into general semidefinite optimization problem, and then a local search method is applied to solve it. The nonnegativity constraint of variables are written in the form of quadratic constraints $x_i\,(x_i - a) \le 0$. The number of such constraints is *n*. The form of such constraints in the formulation of semidefinite optimization problem is matrix with successive shift of non-zero elements. The value of *a* is chosen such that the condition $x \le a$ is satisfied. When we solve semidefinite optimization problems, we use the variation of the parameter *a*. ***Findings.*** Comparative computational experiments were conducted with the problems of different dimensions. Evolutionary search and semidefinite optimization were used. In all cases, the method of semidefinite optimization with local search gave the best solution. As numerical experiments have shown, the value of parameter *a* affects the accuracy of bounds of the original quadratic problem solution. Parameter increment allows obtaining more accurate bounds of the solution. ***Originality.*** In this paper we propose to use semidefinite optimization methods with local search for solving general quadratic problems, and for improvement the semidefinite relaxation we propose to produce a successive restriction of feasible region by varying the parameter *a*. ***Practical value.*** The considered method can be used to find solution of applications that can be formulated as general quadratic programming problems. Comparative experiments confirm the effectiveness of this approach for solving such problems.

Keywords: quadratic problems; semidefinite optimization; improvement of solution bounds; local search; semidefinite relaxation; quadratic optimization

Постановка проблемы

Многие математические модели сложных систем являются квадратичными. Такие задачи возникают в экономике, финансах, управлении, технологических процессах, информатике и других областях [3, 4, 6, 11, 12]. Отличительной особенностью этих задач является их большая размерность и сложность для численного решения. Существующие методы малоэффективны, сходятся к решению задачи лишь локально. Найденные решения этих задач локальными методами далеки от оптимальных. Методы случайного поиска иногда позволяют найти оптимальные решения, но проверка этой оптимальности требует экспоненциального времени. Методы ветвей и границ требует экспоненциального времени для нахождения переменных моделей и поэтому могут быть использованы только для решения задач небольшой размерности. Поэтому поиск более эффективных методов для решения квадратичных задач продолжается [5, 7].

Анализ последних исследований

Одним из новых направлений для решения квадратичных задач является полуопределенная оптимизация [2]. При решении квадратичных задач используется полуопределенная релаксация. Она использует преобразование квадратичного выражения $x^T Ax$ в скалярное произведение матриц $A \bullet xx^T$ или $A \bullet X$, где X – положительно полуопределенная матрица ранга единица, и таким образом позволяет преобразовать квадратичную задачу к задаче полуопределенной оптимизации.

Для решения задач полуопределенной оптимизации разработаны эффективные алгоритмы [1, 10, 13]. Часто решение задачи полуопределенной оптимизации позволяет определить точное решение соответствующей исходной квадратичной задачи. В других случаях, получаем приближенное решение квадратичной задачи, которое может быть использовано для нахождения точного решения. В частности, для нахождения точного решения можно использовать процедуру нахождения верхних и нижних оценок целевых функций квадратичных задач [2]. В работе будут рассмотрены модификации задач полуопределенной оптимизации, которые позволяют находить более точные оценки решений квадратичных задач.

Цель

Целью данной статьи является разработка новых и эффективных методов решения квадратичных задач.

Постановка задачи

Рассмотрим квадратичную задачу в виде системы уравнений

$$f_i(x) = 0,\ i = 1,\ldots,m,\ x \in E^n, \qquad (1)$$

где E^n – n-мерное евклидово пространство, а все $f_i(x)$ – квадратичные функции вида

$$f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i,\ i = 1,\ldots,m. \qquad (2)$$

Все квадратные матрицы A_i являются симметричными. Обычно задачу (1) решают методом Ньютона, который преобразует ее решение к решению последовательности линейных задач

$$\nabla F(x)\Delta x = -f(x), \qquad (3)$$

где $\nabla F(x)$ – матрица первых частных производных функций $f_i(x)$, а

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Решение линейной системы (3) при фиксированном векторе x позволяет найти Δx, тогда следующее приближение к решению системы (1) находят по следующей итерационной процедуре

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x_k,$$

где величина шага перемещения $\alpha_k \in (0, 1]$. Метод Ньютона быстро сходится, но только локально, а это означает, что не гарантируется получение решения задачи (1). Поэтому его рекомендуют использовать только в тех случаях, когда известно приближенное решение задачи (1), близкое к оптимальному. В частности, такое решение получим, решая соответствующую задачу полуопределенной оптимизации. Часто на переменные системы (1) накладываются ограничения неотрицательности переменных. Это усложняет ее решение методом Ньютона. В этом случае значение α_k выбирается из условия положительности переменных задачи.

Система (1) легко преобразуется к следующей эквивалентной задаче оптимизации

$$\max\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \mid f_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots,m,\ x \in E^n\}. \qquad (4)$$

Решение задачи (4) достигается в точке x^*, которая также является решением системы уравнений (1). Переменные системы (1) могут меняться непрерывно или принимать только булевые значения. Тогда задача

$$f_i(x) = 0, i = 1,\ldots,m, x = 0 \vee 1, x \in E^n$$

также преобразуется к эквивалентной квадратичной задаче оптимизации с непрерывно меняющимися переменными

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \;\middle|\; \begin{array}{l} f_i(x) \le 0,\ i = 1,\ldots,m, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i) \le 0,\ 0 \le x \le 1,\ x \in E^n \end{array}\right\}.$$

Преобразование квадратичной задачи оптимизации к полуопределенной

Квадратичные функции можно представить в виде

$$\min\{\bar{A}_0 \bullet X \mid \bar{A}_i \bullet X \le 0, i = 1,\ldots,m, X \succeq 0\}, \qquad (5)$$

где скалярное произведение матриц равно

$$A \bullet X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}.$$

Квадратичные функции равны

$$x^T A_i x + b_i^T x + c_i = \begin{pmatrix} c_i & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & A_i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_i & \frac{b_i^T}{2} \\ \frac{b_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet X = \bar{A}_i \bullet X,\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Таким образом, матрица X имеет ранг 1 и при этом условии задачи (4) и (5) эквивалентны. Квадратичная функция $f_0(x)$ равна

$$f_0(x) = -x^T \sum_{i=1}^{m} A_i x - \sum_{i=1}^{m} b_i x - \sum_{i=1}^{m} c_i.$$

Учитывая то, что первый элемент матрицы X должен быть равен 1, ограничения задачи (5) дополняют условием $I_0 \bullet X = 1$, где

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полуопределенная задача для квадратичных задач будет иметь вид

$$\min\{\bar{A}_0 \bullet X \mid \bar{A}_i \bullet X \le 0,\ i = 1,\dots,m,\ I_0 \bullet X = 1,\ X \succeq 0\}.$$

Полуопределенная релаксация заключается в том, что требование ранга 1 матрицы X в задаче (5) опускается, что может привести к расширению допустимой области задачи (5). Если такое расширение происходит и решение задачи (5) будет находится в этом расширении, то будет найдена только нижняя оценка решения исходной задачи (1).

Для решения задачи (5) разработаны эффективные методы. Это прямо-двойственный метод внутренней точки [8-10] и полуопределенный симплекс-метод [1, 2]. Во многих случаях полуопределенный симплекс-метод является более эффективным. Авторы разработали программное обеспечение этих методов и провели многочисленные сравнительные эксперименты [1, 2].

Часто задача (1) имеет вид

$$f_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,m,\ x \ge 0,\ x \in E^n. \qquad (6)$$

Тогда условия неотрицательности переменных можно записать в виде квадратичных ограничений

$$x_i(x_i - a) \le 0,\ i = 1,\dots,n, \qquad (7)$$

где значение a выбираем таким, чтобы для решения задачи (6) выполнялось условие $x \le a$. Полуопределенный вид ограничений (7) следующий

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & -a/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a/2 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \bullet X \le 0.$$

Число таких ограничений равно n с последовательным сдвигом ненулевых элементов матриц. Как показали численные эксперименты, величина параметра a влияет на точность оценки решения задачи (6). Уменьшение этого параметра позволяет получать более точные оценки.

Численные расчеты

Рассмотрим примеры решения квадратичных задач методом полуопределенной оптимизации.

Пример 1. Найти

$$\max\{\|x\|^2 \mid x^T A_i x + b_i^T x = c_i,\ i = 1,\dots,m,\ x \ge 0\},$$

где матрицы A_i, векторы b_i и константы c_i представлены в табл. 1.

Таблица 1

Задача с четырьмя ограничениями / Problem with four conditions

A_i				b_i	c_i
2	1	2	-1	-1	1,75
1	4	2	-2	3	
2	2	4	1	1	
-1	-2	1	6	2	
3	-1	1	2	4	1
-1	4	2	-1	-2	
1	2	5	2	3	
2	-1	2	8	0	
6	2	-1	-1	1	0,2
2	3	1	2	1	
-1	1	4	2	3	
-1	2	2	5	2	
6	2	-1	-1	1	1
2	4	1	2	1	
-1	1	4	2	3	
-1	2	2	10	2	

Эволюционный поиск нашел решение этой задачи $\|x\|^2 = 0{,}010393$. Использование полуопределенной оптимизации, а затем локальной оптимизации позволило получить лучшее решение $\|x\|^2 = 0{,}019783$.

Пример 2. Решалась предыдущая задача, где матрицы A_i, векторы b_i и константы c_i представлены в табл. 2.

Таблица 2

Задача с тремя ограничениями / Problem with three conditions

A_i				b_i	c_i
2	1	2	-1	-1	1
1	4	2	-2	3	
2	2	4	1	1	
-1	-2	1	6	2	
3	-1	1	2	20	1,5
-1	4	2	-1	-2	
1	2	5	2	3	
2	-1	2	8	0	
6	2	-1	-1	1	1000
2	3	1	2	1	
-1	1	4	2	3	
-1	2	2	5	2	

В этом примере эволюционный поиск нашел следующее решение $\|x\|^2 = 0{,}073127$, а метод полуопределенной оптимизации с локальным поиском позволил найти лучшее решение $\|x\|^2 = 0{,}110726$.

Пример 3. Рассмотрим аналогичный пример большей размерности. Входные данные представлены в табл. 3.

Таблица 3

Задача с шестью ограничениями / Problem with six conditions

A_i						b_i	c_i
3	0	1	0	0	-1	-2	1500
0	4	0	2	2	0	0	
1	0	7	-1	0,5	0	0	
0	2	-1	11	0	1	1	
0	2	0,5	0	4	0	0	
-1	0	0	1	0	3	0	
2	0	0	0	0	-1	0	600
0	5	0	3	-2	0	0	
0	0	6	0	0	0	0	
0	3	0	3	0	1	2	
0	-2	0	0	14	0	0	
-1	0	0	1	0	7	0	
3	0	0	1	0	0	0	800
0	3	0	0	0	0	0	
0	0	3	0	0	0	0	
1	0	0	3	0	-1	1	
0	0	0	0	3	0	0	
0	0	0	-1	0	2	0	
8	0	0	0	0	1	0	400
0	4	0	0	1	0	0	
0	0	5	-1	0	-2	0	
0	0	-1	5	-1	0	0	
0	1	0	-1	3	0	0	
1	0	-2	0	0	3	-1	
4	0	0	0	0	0	0	2000
0	4	0	0	-1	0	0	

Окончание табл. 3

A_i						b_i	c_i
0	0	3	0	0	0	2	
0	0	0	2	-2	0	0	
0	-1	0	-2	3	0	2	
0	0	0	0	0	4	0	
4	0	0	0	0	0	0	800
0	4	0	0	-1	0	0	
0	0	2	0	0	0	0	
0	0	0	2	-2	0	0	
0	-1	0	-2	3	0	0	
0	0	0	0	0	4	0	

Эволюционный поиск нашел приближенное решение $||x||^2 = 96{,}66515$, а метод полуопределенной оптимизации с локальным поиском снова нашел лучшее решение $||x||^2 = 124{,}2711$.

Были проведены сравнительные эксперименты с задачами большей размерности. Во всех случаях метод полуопределенной оптимизации с локальным поиском давал лучшее решение. При решении задач полуопределенной оптимизации использовалась вариация параметра a.

Выводы

Для решения общих квадратичных задач использовались методы полуопределенной оптимизации с локальным поиском. Для уточнения полуопределенной релаксации производилось последовательное сужение допустимой области. Приведенные численные эксперименты показывают преимущества данного метода при решении квадратичных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косолап, А. И. Численная эффективность методов полуопределенной оптимизации / А. И. Косолап, А. С. Перетятько // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 2. – С. 56–64.

2. Перетятько, А. С. Напіввизначена оптимізація для розв'язування загальних квадратичних задач: автореф. дис. на здоб. наук. ступ. канд. фіз.-мат наук: 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Анастасія Сергіївна Перетятько; Харківський національний університет радіоелектроніки. – Електрон. дані (1 файл). – Харків, 2015. – 20 с. – Режим доступу: http://nure.ua/ wp-content/uploads/autorefPeretiatko.pdf.

3. Ben-Tal, A. Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming / A. Ben-Tal, A. Nemirovski // SIAM Journal on Optimization. – Електрон. дані (1 файл). – 1997. – Vol. 7. – No. 4. – P. 991-1016. – Режим доступу: https://doi.org/10.1137/S1052623495291951.

4. Bie, T. D. Deploying SDP for machine learning / T. D. Bie. – Електрон. дані (1 файл). – Режим доступу: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/ download?doi=10.1.1.104.1885&rep=rep1&type=pdf.

5. Dominguez, J. A primal-dual interior-point algorithm for quadratic programming / J. Dominguez, M. D. González-Lima // Numerical Algorithms. – 2006. – Vol. 42. – P. 1–30. – Режим доступу: https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-006-9019-5.

6. Gepp, A. A. Review of Semidefinite programming including Financial Applications / A. Gepp. – 2006. – 29 p.

7. Gill, P. E. Methods for Convex and General Quadratic Programming / P. E. Gill, E. Wong. – Електрон. дані (1 файл). – 2014. – 37 p. – Режим доступу: http://www.ccom.ucsd.edu/~peg/papers/genqp.pdf.

8. Nesterov, Y. E. Interior point polynomial algorithms in convex programming / Y. E. Nesterov, A. S. Nemirovskii // SIAM Studies in Applied Mathematics. – 2001. – Vol. 13. – SIAM: Philadelphia, USA. – 405 p.

9. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. – Електрон. дані (1 файл) – Springer, 2006. – 685 p. – Режим доступу: http://www.bioinfo.org.cn/~wangchao/maa/Numerical_Optimization.pdf.

10. Roumili, H. Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs / H. Roumili, A. Keraghel, A. Yassine // Applied Mathematical Sciences. – Електрон. дані (1 файл). – 2007. – Vol. 1. – No. 21. – P. 1009–1018. – Режим доступу: http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password21-24-2007/roumiliAMS21-24-2007.pdf.

11. So, A. M.-C. Theory of semidefinite programming for Sensor Network Localization / A. M.-C. So, Y. Ye // Mathematical Programming. – Електрон. дані (1 файл). – 2007. – Vol. 109. – P. 367–384. – Режим доступу: https://link.springer.com/article/10.1007/s10107-006-0040-1.

12. Tuncel, L. Some Applications of Semidefinite Optimization from an Operations Research Viewpoint / L. Tuncel. – Електрон. дані (1 файл). – 2008. – 28 p. – Режим доступу: https://www.math.uwaterloo.ca/~ltuncel/publications/IOR-invited-survey.pdf.

13. Wen, Z. Alternating Direction Augmented Lagrangian Methods for Semidefinite Programming / Z. Wen, D. Goldfarb, W. Yin // Math. Prog. – Електрон. дані (1 файл). – 2010. – №2. – P. 203–230. – Режим доступу: http://mpc.zib.de/index.php/MPC/article/viewFile/40/20.

REFERENCES

1. Kosolap A.I., Peretiatko A.S. *Chislennaia effektivnost metodov poluopredelennoy optimizatsii* [Numerical efficiency of semidefinite optimization methods]. *Problemy upravleniia i informatiki* [Problems of control and informatics], 2014, no. 2, pp. 56–64. (in Russian).

2. Peretiatko A.S. *Napivvyznachena optymizatsiia dlia rozviazuvannia zahalnykh kvadratychnykh zadach* [Semidefinite optimization for solving general quadratic problems. Abstract of Ph. D. dissertation]. *Kharkivskyi natsionalnyi universytet radioelektroniky* [Kharkiv National University of Radio Electronics]. Kharkiv, 2015, 20 p. (in Ukrainian).

3. Ben-Tal A. and Nemirovski A. *Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming*. SIAM Journal on Optimization, 1997, Vol. 7, No. 4, pp. 991-1016. Available at: https://doi.org/10.1137/S1052623495291951.

4. Bie T.D. *Deploying SDP for machine learning*. Available at: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.104.1885&rep=rep1&type=pdf.

5. Dominguez J. and González-Lima M.D. *A primal-dual interior-point algorithm for quadratic programming.* Numerical Algorithms, 2006, Vol. 42, pp. 1–30. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s11075-006-9019-5.

6. Gepp A.A. *Review of Semidefinite programming including Financial Applications*. 2006, 29 p.

7. Gill P.E. and Wong E. *Methods for Convex and General Quadratic Programming*. 2014, 37 p. Available at: http://www.ccom.ucsd.edu/~peg/papers/genqp.pdf.

8. Nesterov Y.E. and Nemirovskii A.S. *Interior point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM: Philadelphia, 1994, Vol. 13, 405 p.

9. Nocedal J. and Wright S.J. *Numerical optimization*. Springer, 2006, 685 p.

10. Roumili H., Keraghel A. and Yassine A. *Infeasible Interior Point Method for Semidefinite Programs*. Applied Mathematical Sciences, 2007, Vol. 1, No. 21, pp. 1009–1018. Available at: http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password21-24-2007/roumiliAMS21-24-2007.pdf.

11. So A.M.-C. and Ye Y. *Theory of semidefinite programming for Sensor Network Localization*. Mathematical Programming, 2007, Vol. 109, pp. 367–384. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s10107-006-0040-1.

12. Tuncel L. *Some Applications of Semidefinite Optimization from an Operations Research Viewpoint*. 2008, 28 p. Available at: https://www.math.uwaterloo.ca/~ltuncel/publications/IOR-invited-survey.pdf.

13. Wen Z., Goldfarb D. and Yin W. *Alternating Direction Augmented Lagrangian Methods for Semidefinite Programming*. Math. Prog, 2010, №2, pp. 203–230. Available at: http://mpc.zib.de/index.php/MPC/article/viewFile/40/20.