УДК 519.85

ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ

КОСОЛАП А. И. [1], *д. физ-мат. н., проф.*,
НЕСТЕРЕНКО А. Н. [2*], *аспирант.*

[1] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Набережная Победы, 40, 49005, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-733
[2*] Кафедра специализированных компьютерных систем, Государственное высшее учебное заведение «Украинский государственный химико-технологический университет», ул. Запорожское Шоссе 68, 49041, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (097) 6541635, e-mail: an.nestere@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-0620-3963

Аннотация. ***Цель.*** В работе рассматриваются квадратичные оптимизационные модели для задач теории расписаний, возникающих при исследовании конвейерной системы машин (flow shop) со стандартными ограничениями. Полученные квадратичные модели является многоэкстремальными. Целью исследования является разработка эффективных методов построения оптимальных расписаний с использованием квадратичной регуляризации. ***Методика.*** Путем квадратичной регуляризации ограничения задачи конвейерной системы машин сводятся к максимизации евклидовой нормы вектора на выпуклом множестве. Использован метод точной квадратичной регуляризации, который позволяет находить глобальные решения в многоэкстремальных задачах. ***Результаты.*** Показано, что любая задача теории расписаний для конвейерной системы машин сводится к задаче максимума квадратичной функции с набором линейных и квадратичных ограничений Применен метод точной квадратичной регуляризации с линейным сдвигом координат для поиска глобального экстремума. Разработан алгоритм решения этого класса задач. ***Научная новизна.*** Проведенное преобразование задачи конвейерной системы машин позволяет решать все задачи такого типа методами выпуклой оптимизации и дихотомии, и не требует разрабатывать алгоритмы для отдельных классов задач теории расписаний. Показано, что с помощью линейного сдвига системы координат многоэкстремальная задача оптимизации может быть сведена к одноэкстремальной. ***Практическая значимость.*** Разработанная методика решения задач теории расписаний для конвейерной системы машин позволит получать оптимальные расписания выполнения задач. Это позволит минимизировать время выполнения операций в технологических процессах.

Ключевые слова: теория расписаний; выпуклая оптимизация; глобальная оптимизация; метод точной квадратичной регуляризации

ОПТИМІЗАЦІЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ РОЗКЛАДІВ З КВАДРАТИЧНИМ КРИТЕРІЄМ

КОСОЛАП А. І. [1], *д. фіз-мат. н., проф.*,
НЕСТЕРЕНКО А. Н. [2*], *аспірант.*

[1] Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Набережна Перемоги, 40, 49005, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707.
[2*] Кафедра спеціалізованих комп'ютерних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет», вул. Запорізьке Шосе, 68, 49041, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (097) 6541635, e-mail: an.nestere@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-0620-3963

Антоація. Мета. У роботі розглядаються квадратичні оптимізаційні моделі для задач теорії розкладів, що виникають при дослідженні конвеєрної системи машин (flow shop) зі стандартними обмеженнями. Отримані квадратичні моделі є багатоекстремальними. Метою дослідження є розробка ефективних методів побудови оптимальних розкладів з використанням квадратичної регулярізації. **Методика.** Шляхом квадратичної регулярізації обмеження задачі конвеєрної системи машин зводяться до максимізації евклідової норми вектору на опуклій множині. Використано метод точної квадратичної регуляризації, який дозволяє знаходити глобальні розв'язки в багатоекстремальних задачах. Результати. Показано, що будь-яка задача теорії розкладів для конвеєрної системи машин зводиться до задачі максимуму квадратичної функції з набором лінійних і квадратичних обмежень. Застосовано метод точної квадратичної регуляризації з лінійним зсувом координат для пошуку глобального екстремуму. Розроблено алгоритм розв'язання цього класу задач. **Наукова новизна.** Проведене перетворення задачі конвеєрної системи машин дозволяє розв'язувати усі задачі цього класу за допомогою методів опуклої оптимізації та дихотомії, і не потребує розробляти алгоритми для окремих класів задач теорії розкладів. Показано, що за допомогою лінійного зрушення системи координат багатоекстремальна задача оптимізації може бути зведена до одно екстремальної. **Практична значимість.** Розроблена методика розв'язання задач теорії розкладів для конвеєрної системи машин дозволяє отримати оптимальні розклади виконання завдань. Це дозволить мінімізувати час виконання операцій у технологічних процесах.

Ключові слова: теорія розкладів;, опукла оптимізація; глобальна оптимізація; метод точної квадратичної регуляризації

OPTIMIZATION IN PROBLEMS OF SCHEDULE THEORY WITH A SQUARE CRITERION

KOSOLAP A. I. [1], *Dr. Sc. (Phys.-Math.), Prof.,*
NESTERENKO A. N. [2*], *Ph.D. student*

[1] Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 40, Naberezhna Peremogy str., Dnipropetrovsk 49005, Ukraine, tel. +38 (0562) 7535726, e-mail: anivkos@ua.fm, ORCID ID: 0000-0001-73386707
[2*] Department of specialized computer systems, State Higher Education Establishment "Ukrainian State University of Chemical Technology", 68, Zaporiske Shose str., Dnipropetrovsk 49041, Ukraine, tel. +38 (097) 6541635, e-mail: an.nestere@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-0620-3963

Abstract. Goal. The paper considers quadratic optimization models for the problems of scheduling theory that arise in the study of conveyor machines system (flow shop) with standard constraints. The obtained quadratic models are multiextremal. The aim of the study is to develop effective methods for constructing optimal schedules using quadratic regularization. **Methodology**. Using quadratic regularization, the constraints of the problem of conveyor machines system are reduced to maximization of Euclidian vector norm at the convex set. We used the method of exact quadratic regularization, which allows us to find global solutions in multiextremal problems. **Results**. It is shown that any problem of scheduling theory for the conveyor machines system can be reduces to the problem of maximizing a quadratic function with a set of linear and quadratic constraints. A method of exact quadratic regularization with a linear coordinate shift was used to find the global extremum. An algorithm for solving this class of problems was developed. **Scientific novelty**. Conducted transformation of the problem of conveyor machines system allows solving all problems of this type by methods of convex optimization and dichotomy, rather than developing algorithms for separate classes of scheduling theory problems. It is shown that the system the multiextremal convex optimization problem can be reduced to a one-extremal one using a linear coordinate shift. **Practical significance**. The developed methodology for solving the problems of scheduling theory for conveyor machines system allow obtaining optimal schedules for processing of the tasks. This technique allows to minimize processing time of operations in technological processes.

Keywords: scheduling theory; convex optimization; global optimization; method of exact quadratic regularization

Введение

При управлении технологическими процессами, которые включают большое число операций на последовательности станков, возникают задачи упорядочения этих операций. Число вариантов выполнения операций очень большое и от порядка их выполнения зависит время изготовления сложного оборудования. Таким образом, от порядка выполнения операций зависит эффективность производства. Такие же задачи возникают в вычислительных системах, компьютерных сетях и многих других областях. Существует большое разнообразие задач теории расписаний. Большинство из них достаточно сложные и относятся к классу NP-сложных задач [3, 5]. Для решения этих задач были разработаны преимущественно эвристические алгоритмы, позволяющие находить приближенные решения. Точные алгоритмы позволяют решать только задачи малой размерности. Первые исследования в этой области появились еще в середине прошлого века. Но, несмотря на значительные усилия многих исследователей, до настоящего времени эффективные методы решения задач теории расписаний не разработаны. Поэтому поиск эффективных методов продолжается [4, 7].

В данной работе для решения задачи теории расписаний, которая относится к классу общих квадратичных задач, используется метод точной квадратичной регуляризации [1]. Этот метод эффективен для решения сложных квадратичных задач, что подтверждается многими численными экспериментами при решении сложных тестовых задач [2].

Целью данной работы использовать метод точной квадратичной регуляризации для решения задач теории расписаний.

Постановка задачи

Имеется n операций, которые надо выполнить на m приборах (машинах, станках). Известно время t_{ij} выполнения j-й операции на i-й машине. Технологические цепочки выполнения операций могут быть разными. Обычно операции выполняются в порядке возрастания номеров машин. Кроме того, будем предполагать, что операции не прерываются при выполнении на данной машине. Существуют классы задач теории расписаний, для которых прерывания возможны. Такие задачи возникают в компьютерных системах, но в данной работе не рассматриваются. Если некоторые операции не выполняются на данной машине, то время ее выполнения полагаем равной нулю. Необходимо завершить время выполнения всех операций за минимальное время. Обозначим через x_{ij} – время начала выполнения j-й операции на i-й машине. Естественно, что x_{ij} могут принимать только допустимые значения, при которых соответствующую технологическую цепочку можно реализовать. Таким образом, на неизвестные переменные x_{ij} необходимо наложить ограничения. Первое ограничение заключается в том, что на одной машине не могут одновременно обрабатываться две операции одновременно. Если k-я операция выполняется на i-й машине раньше j-й, то должно выполняться неравенство

$$x_{ik} + t_{ik} \le x_{ij}\,.$$

Таким образом, j-я операция может начаться только после окончания выполнения k-й операции. Если же j-я операция выполняется раньше k-й, то выполняется неравенство

$$x_{ij} + t_{ij} \le x_{ik}\,.$$

Эти неравенства должны выполняться для всех допустимых значений i, j, k. Эти ограничения можно записать одним квадратичным условием

$$(x_{ik} + t_{ik} - x_{ij})(x_{ij} + t_{ij} - x_{ik}) \le 0, \forall ijk\,.$$

Следующее ограничение заключается в том, что две машине одновременно не могут обрабатывать одну операцию или, что то же самое, одна операция не может одновременно обрабатываться на двух машинах. Это равносильно следующему неравенству

$$x_{ij} + t_{ij} \le x_{i+1j}, \forall ij$$

при условии, что операции выполняются в порядке возрастания номеров машин. В качестве критерия возьмём

$$\min\{\sum_{j=1}^{n}(x_{mj} + t_{mj})^2\}\,.$$

Это средневзвешенное время завершения всех операций.

Таким образом, получена общая квадратичная оптимизационная задача

$$\min\{\sum_{j=1}^{n}(x_{mj} + t_{mj})^2 \mid (x_{ik} + t_{ik} - x_{ij})(x_{ij} + t_{ij} - x_{ik}) \le 0,$$
$$\forall ij \ne k, x_{ij} + t_{ij} \le x_{i+1j}, \forall ij, x \ge 0\}\,. \qquad (1)$$

Задача (1) содержит nm переменных и $n(m-1) + m\dfrac{n(n-1)}{2}$ не считая простых ограничений $x \ge 0$.

Сложность решения задачи (1) обусловлена квадратичными ограничениями. Они определяют невыпуклую и несвязную допустимую область, что затрудняет ее численное решение, так как такая задача содержит большое число локальных минимумов.

Метод точной квадратичной регуляризации для решения задачи (1)

Квадратичная регуляризация позволяет преобразовать допустимую область задачи (1) к выпуклой. Это достигается следующим образом

$$\max\{\|x\|^2 \mid \sum_{j=1}^{n}(x_{mj} + t_{mj})^2 + s + (r-1)\|x\|^2 \le d,$$
$$(x_{ik} + t_{ik} - x_{ij})(x_{ij} + t_{ij} - x_{ik}) + r\|x\|^2 \le d, \forall ij \ne k,$$
$$x_{ij} + t_{ij} \le x_{i+1j}, \forall ij, x \ge 0\} \qquad (2)$$

где $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{nm}^2 + x_{nm+1}^2$ – евклидова норма вектора x. Параметр s выбирается из условия

$$s \ge \|\bar{x}^*\|^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_{mj}^* + t_{mj})^2, \|\bar{x}^*\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{nm}^2,$$

а x^* – решение задачи (1). Параметр $r > 0$ позволяет преобразовать допустимую область задачи (1) к выпуклой. Для задачи (1) достаточно взять $r = 4$.

Преобразование задачи (1) к (2) увеличивает ее размерность на 2 переменные (x_{nm+1}, d) и на одно ограничение. В задаче (2) необходимо найти минимальное значение d, при котором с заданной точностью будет выполняться условие

$$r\|x\|^2 = d\,. \qquad (3)$$

Алгоритм решения задачи следующий.

Шаг 1. Находим минимально допустимое d_0 из решения следующей выпуклой задачи

$$\max\{d \mid \sum_{j=1}^{n}(x_{mj} + t_{mj})^2 + s + (r-1)\|x\|^2 \le d,$$
$$(x_{ik} + t_{ik} - x_{ij})(x_{ij} + t_{ij} - x_{ik}) + r\|x\|^2 \le d, \forall ij \ne k,$$
$$x_{ij} + t_{ij} \le x_{i+1j}, \forall ij, x \ge 0\}\,.$$

Если условие (3) для решения этой задачи выполняется, то задача (2), а, следовательно, и задача (1) решена.

Шаг 2. При $r\|x\|^2 < d$ значение d в задаче (2) увеличиваем, а при $r\|x\|^2 > d$ – уменьшаем по формуле

$$d = d + \alpha(d - r\|x\|^2)\,,$$

где $\alpha \in (0,\ 1]$. Для каждого фиксированного значения d решаем задачу (2). Значение $r\|x\|^2 = d$ будет монотонно меняться при возрастании d, поэтому через небольшое число итераций (решений задачи (2)) будет найдено требуемое значение d, для которого будет с заданной точностью выполняться условие

$$r\,\|x\|^2 = d\,.$$

Для решения задачи (2) при фиксированном значении d использовался прямо-двойственный метод внутренней точки [6]. В качестве начальной точки выбирался центр выпуклой допустимой области. Заметим, что ограничение

$$r\,\|x\|^2 \ge d$$

сужает допустимую область и приближает ее центр к искомому решению.

В точке максимума задачи (2) кривизна шара (линии уровня целевой функции) будет меньше кривизны ее выпуклой поверхности в этой точке. Если задача (2) имеет два и более локальных максимума, то в силу ее непрерывности между двумя максимумами на дуге выпуклой поверхности (допустимой области) будет, по крайней мере, один минимум. В точке минимума кривизна шара будет больше кривизны этой дуги. Тогда, если в любой точке выпуклой поверхности ее кривизна больше кривизны шара, то задача не будет содержать локальных минимумов. В таком случае, задача (2) будет одноэкстремальной и легко решаемой. При смещении допустимой области вдоль биссектрисы положительного октанта кривизна ее поверхности остается неизменной, а кривизна шара с центром в начале координат будет стремиться к нулю. Это означает, что смещение пространства в задаче (1) может привести ее к одноэкстремальной.

Преобразуем задачу (1) к виду

$$\min\{\sum_{j=1}^{n}(x_{mj}+t_{mj}-h)^2 \mid$$
$$(x_{ik}+t_{ik}-x_{ij})(x_{ij}+t_{ij}-x_{ik}) \le 0,$$
$$\forall ij \ne k, x_{ij}+t_{ij} \le x_{i+1j}, \forall ij, x \ge h\}$$

Используем квадратичную регуляризацию для получения эквивалентной задачи

$$\max\{\|x\|^2 \mid \sum_{j=1}^{n}(x_{mj}+t_{mj}-h)^2 + s + (r-1)\|x\|^2 \le d,$$
$$(x_{ik}+t_{ik}-x_{ij})(x_{ij}+t_{ij}-x_{ik}) + r\,\|x\|^2 \le d, \forall ij \ne k,$$
$$x_{ij}+t_{ij}-x_{i+1j} + r\,\|x\|^2 \le d, \forall ij, x \ge 0\}\,. \quad (4)$$

Численные результаты показали лучшие результаты при решении задачи (4).

Пример работы метода

Таблица 1

Исходные данные. Время обработки задания на соответствующей машине / Initial Data. Duration of task processing at corresponding machine

Машина \ Задание	1	2	3	4	5
1	5	4	7	2	3
2	8	4	1	8	5
3	1	9	4	4	1

Таблица 2

Начальные значения переменных x_{ij} / Initial values of variables x_{ij}

Машина \ Задание	1	2	3	4	5
1	6	6	6	0	18
2	6	6	6	6	6
3	6	6	6	6	6

В соответствии с идеями теории расписаний первым обычно выполняется задание с минимальным временем обработки на первой машине, а последним - с минимальным временем обработки на последней машине.

Таблица 3

Параметры точной квадратичной регуляризации/ Parameters for exact quadratic regularization

Параметр	r	d	S	h
Значение	50	200000	3780	0

После первого шага расчетов с использованием программы ExcelSolver получаем следующие значения переменных x_{ij}.

Таблица 4

Шаг № 1/Step 1

Машина \ Задание	1	2	3	4	5
1	6,57	2,5733	11,573	1E-07	18,6
2	11,6	8,082	18,573	2	23
3	19,6	12,287	19,573	10	28

Значение параметров/Parameters values

Параметр	r	d	s	h
Значение	50	170134	3780	0

При этом условие (3) не выполняется и $r\,\|x\|^2 < d$, поэтому на втором шаге расчетов увеличиваем значение d и проводим расчет этого шага.

Таблица 5

Шаг № 2/Step 2

Задание / Машина	1	2	3	4	5
1	7,56	3,5435	12,565	1E-07	19,6
2	12,6	9,2823	20,044	2	22,6
3	26,7	13,467	21,811	10	27,6

Значение параметров/Parameters values

Параметр	r	d	s	h
Значение	50	200000	3780	0

Условие (3) не выполняется и $r\|x\|^2 < d$, поэтому возвращаемся к шагу № 1.

В результате получим:

Таблица 6

Результаты/Results

Задание / Машина	1	2	3	4	5
1	6	2	11	0	18
2	14	10	22	2	23
3	23	14	24	10	28

Это решение является оптимальным.

Выводы

В работе рассматривается сложная задача теории расписаний, которая сводится к решению общей квадратичной оптимизационной задачи. Точная квадратичная регуляризация позволяет значительно упростить ее решение. Для решения преобразованной задачи использовался эффективный прямо-двойственный метод внутренней точки и метод дихотомии. Численные эксперименты подтверждают эффективность выбранного метода решения данного класса задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации/ А. И. Косолап. - Днепропетровск: ПГАСА, 2015. – 164 с.
2. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Численные эксперименты/ А. И. Косолап. - Днепр: ПГАСА, 2015. – 112 с.
3. Baker, K. R. Principles of sequencing and scheduling/ K. R. Baker, D. Trietsch.- Hoboken, New Jersey: A JOHN WILEY & SONS, 2009.- 510 p.
4. Brucker, P. Scheduling Algorithms /P. Brucker. – Berlin: Springer-Verlag, 2007.- 377 p.
5. Coffman E.G., Bruno J.L., Graham R.L. and etc. (1976) Computer and job-shop scheduling theory. John Wiley & Sons, 336.
6. Nocedal J. and S.J. Wright, Numerical optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. - Springer, 2006. – 685 p.
7. Pinedo, M. L. Scheduling: Theory, Algorithms, And Systems; Fourth Edition/M. L. Pinedo.-NY: Springer, 2012.-696 p.

REFERENCES

1. Kosolap A. I. *Globalnaya optimizatsiya. Metod tochnoy kvadratichnoy regulyarizatsii* [Global optimization. A method of exact quadratic regularization]. Dnipropetrovs'k, PGASA [PSAES], 2015, 164 p. (in Russian).
2. Kosolap A. I. *Globalnaia optimizatsiia. Chislennyye eksperimenty* [Global optimization. Numerical Experiments]. Dnepr: PGASA [PSAES], 2015, 112 p. (in Russian).
3. Baker, K. R., Trietsch D. *Principles of sequencing and scheduling*. Hoboken, New Jersey: A JOHN WILEY & SONS, 2009, 510 p.
4. Brucker, P. *Scheduling Algorithms*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 377 p.
5. Coffman E.G., Bruno J.L., Graham R.L. and etc. *Computer and job-shop scheduling theory*. John Wiley & Sons, 1976, 336p.
6. Nocedal, J., *Wright S. J. Numerical optimization*. Springer, 2006. 685 p.
7. Pinedo, M. L. *Scheduling: Theory, Algorithms, And Systems; Fourth Edition*. New York: Springer, 2012. 696 p.